XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971

УДК 511

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Й. Кубилюс, З. Юшкис

Комплекснозначная функция $g(m)$, определенная на множестве всех целых положительных чисел, называется мультипликативной, если для любой пары взаимно простых m, n

$$g(mn)=g(m)\,g(n).$$

Через $\frac{1}{n}N\{m\leqslant n,\ \ldots\}$ будем обозначать частоту целых положительных $m\leqslant n$, удовлетворяющих условиям, которые каждый раз будут указываться в скобках вместо многоточия.

А. Бакштису [1] удалось найти весьма широкие условия, при которых функции распределения

$$\frac{1}{n}\ N\{m\leqslant n,\ g(m)<x\},$$

$$\frac{1}{n}\ N\{m\leqslant n,\ (e^{-A(n)}|g(m)|)^{1/B(n)}\operatorname{sgn} g(m)<x\}=$$

$$=\frac{1}{n}\ N\{m\leqslant n,\ g(m)<e^{A(n)}|x|^{B(n)}\operatorname{sgn} x\}, \tag{1}$$

где $A(n)$ и $B(n)$ – нормирующие показатели, а $g(m)$ – вещественная мультипликативная функция, сходятся к некоторой функции распределения в каждой точке непрерывности последней, а также в точке $x=0$. Естественно возникает задача оценки быстроты сходимости к предельному закону. Этой задаче и посвящена данная работа.

В теории мультипликативных функций весьма полезны некоторые модификации преобразования Меллина, введенные В. М. Золотаревым [2] для целей изучения перемножения независимых случайных величин. Для любой функции распределения $F(x)$ положим:

$$w_{kF}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}{}' |x|^{it}\operatorname{sgn}^k x\,dF(x) \qquad (k=0,\ 1),$$

где штрих указывает, что точка $x=0$ исключается из области интегрирования. Функции $w_{kF}(t)$ определены для всех вещественных t. Их будем называть характеристическими преобразованиями. Положим, далее,

$$\beta_{0F}=1-F(+0)=\frac{1}{2}\left(w_{0F}(0)+w_{1F}(0)\right),$$

$$\beta_{1F}=F(0)=\frac{1}{2}\left(w_{0F}(0)-w_{1F}(0)\right),$$

$$F_0(x)=\frac{F(e^x)-F(+0)}{\beta_{0F}}, \quad \text{если} \quad \beta_{0F}\neq 0,$$

$$F_1(x)=\frac{F(0)-F(-e^x+0)}{\beta_{1F}}, \quad \text{если} \quad \beta_{1F}\neq 0. \tag{2}$$

$F_0(x)$ и $F_1(x)$ являются, очевидно, функциями распределения. Если $f_0(t)$ и $f_1(t)$ – характеристические функции, соответствующие $F_0(x)$ и $F_1(x)$, то, как легко проверить,

$$w_{kF}(t)=\beta_{0F}f_0(t)+(-1)^k\beta_{1F}f_1(t) \qquad (k=0,\ 1). \tag{3}$$

Эта формула справедлива и в том случае, когда какой-либо из β_{kF}, или оба, равны 0, если условиться, что соответствующие члены в правой части равны 0. Отсюда легко выводится, что пара характеристических преобразований однозначно определяет функцию распределения. Более того, взаимно однозначное соответствие между функциями распределения и парами их характеристических преобразований непрерывно в следующем смысле. Если последовательность функций распределения $\{F_n\}$ сходится к некоторой функции распределения F во всех ее точках непрерывности, а также $F_n(0)\to F(0)$ и $F_n(+0)\to F(+0)$, то последовательность соответствующих характеристических преобразований $\{w_{0F_n}, w_{1F_n}\}$ сходится к характеристическим преобразованиям $\{w_{0F}, w_{1F}\}$ функции F. Наоборот, если последовательность характеристических преобразований $\{w_{0F_n}, w_{1F_n}\}$ сходится к некоторым функциям $\{w_0, w_1\}$, непрерывным в точке $t=0$, то $\{w_0, w_1\}$ являются характеристическими преобразованиями некоторой функции распределения F и последовательность соответствующих функций распределения $\{F_n\}$ сходится к F в указанном выше смысле.

По близости характеристических преобразований можно судить о близости функций распределения. Нам понадобится аналог хорошо известного неравенства Эссеена. Среди различных обобщений этого неравенства наиболее общие результаты принадлежат А. С. Файнлейбу и В. В. Петрову. Мы дадим аналог неравенства Эссеена в форме В. В. Петрова.

Лемма 1. *Пусть* $F(x)$ *и* $G(x)$ – *функции распределения,* $I_0=(0,\infty)$, $I_1=(-\infty,0)$.

$$L_0=\sup_{0<x<\infty}|F(x)-G(x)|, \quad L_1=\sup_{-\infty<x\leqslant 0}|F(x)-G(x)|.$$

Тогда для любых $T>0$, $b>\frac{1}{2\pi}$ *и* $k=0;\ 1$

$$L_k\leqslant|\beta_{kF}-\beta_{kG}|+R_{kFG},$$

где $R_{kFG}=0$, *если* $\beta_{kF}\beta_{kG}=0$, *и*

$$R_{kFG}=\frac{\beta_{kF}bTA_k}{\beta_{kG}}+\frac{1}{2}\beta_{kF}b\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{W_{kFG}(t)}{t}\right|dt,$$

$$A_k=\sup_{x\in I_k}\int\limits_{|u|\leqslant\frac{c(b)}{T}}|G(xe^u)-G(x)|\,du,$$

$$W_{kFG}(t)=\frac{w_{0F}(t)+(-1)^k w_{1F}(t)}{\beta_{kF}}-\frac{w_{0G}(t)+(-1)^k w_{1G}(t)}{\beta_{kG}}$$

в случае $\beta_{kF}\beta_{kG}\neq 0$. *Константа* $c(b)$ *связана с* b *равенством*

$$\int\limits_{0}^{c(b)/4}\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8b}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\beta_{kF}\beta_{kG}\neq 0$. Имеем, очевидно,

$$\sup_{0<x<\infty}|F(x)-G(x)|=\sup_{-\infty<y<\infty}|F(e^y)-G(e^y)|,$$

$$\sup_{-\infty<x<0}|F(x)-G(x)|=\sup_{-\infty<y<\infty}|F(-e^y+0)-G(-e^y+0)|.$$

После элементарных преобразований получаем:

$$F(e^y)-G(e^y)=\beta_{0F}\Big(F_0(y)-G_0(y)\Big)-(\beta_{0F}-\beta_{0G})\Big(1-G_0(y)\Big),$$

если $\beta_{0F}\beta_{0G}\neq 0$,

$$F(-e^y+0)-G(-e^y+0)=-\beta_{1F}\Big(F_1(y)-G_1(y)\Big)+$$

$$+(\beta_{1F}-\beta_{1G})\Big(1-G_1(y)\Big),$$

если $\beta_{1F}\beta_{1G}\neq 0$, где F_k, G_k — определенные формулами (2) функции распределения. Отсюда выводим, что

$$L_k\leqslant|\beta_{kF}-\beta_{kG}|+\beta_{kF}\sup_{-\infty<y<\infty}|F_k(y)-G_k(y)|.$$

Применение неравенства Эссеена в форме В. В. Петрова позволяет заключить, что для любых $T>0$ и $b>\frac{1}{2\pi}$

$$L_k\leqslant|\beta_{kF}-\beta_{kG}|+\beta_{kF}b\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{f_k(t)-g_k(t)}{t}\right|dt+$$

$$+\beta_{kF}bT\sup_{-\infty<y<\infty}\int\limits_{|u|\leqslant\frac{c(b)}{T}}|G_k(y+u)-G_k(y)|\,du.$$

Здесь f_k и g_k — характеристические функции, соответствующие F_k и G_k. Остается, воспользовавшись (3) и (2), выразить $f_k(t)$ и $g_k(t)$ через характеристические преобразования и G_k через G.

Пусть теперь хотя бы одно из β_{0F}, β_{0G} равно нулю. Для определенности положим, что $\beta_{0G}=0$. Тогда $G(x)=1$ при $x>0$. Следовательно, при $x>0$

$$|F(x)-G(x)|=1-F(x)\leqslant 1-F(+0)=\beta_{0F}=\beta_{0F}-\beta_{0G}.$$

Аналогично, если хотя бы одно из β_{1F}, β_{1G}, скажем β_{1G}, равно нулю, то при $x\leqslant 0$

$$|F(x)-G(x)|=F(x)\leqslant F(0)=\beta_{1F}-\beta_{1G}.$$

Условимся в некоторых обозначениях. Пусть c — положительная, $\lambda\neq 0$ — вещественные константы. Через $M_0(c, \lambda)$ мы будем обозначать класс вещественных мультипликативных функций $g(m)$, для которых ряды по простым числам p

$$\sum_{g(p)=0}\frac{\ln p}{p},\quad \sum_{g(p)<0}\frac{a_p^*}{p},\quad \sum_{g(p)>0}^{p}\frac{a_p^{**}}{p},\quad \sum_{p}\sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{|\ln|g(p^\alpha)||}{p^\alpha} \tag{4}$$

сходятся. Некоторые из этих сумм могут быть не бесконечными рядами, а лишь конечными суммами. Здесь положено

$$a_p=|\ln|g(p)|-\lambda|\quad \text{при}\quad g(p)\neq 0,$$

$$a_p^*=\max(a_p,\ \ln p),$$

$$a_p^{**}=\begin{cases} a_p\ln p, & \text{если}\quad a_p<c,\\ \max(a_p,\ \ln p), & \text{если}\quad a_p\geqslant c.\end{cases}$$

Аналогично, через $M_1(c, \lambda)$ будем обозначать класс вещественных мультипликативных функций $g(m)$, для которых ряды

$$\sum_{g(p)=0}\frac{\ln p}{p},\quad \sum_{g(p)>0}\frac{a_p^*}{p},\quad \sum_{g(p)<0}\frac{a_p^{**}}{p},\quad \sum_{p}\sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}\frac{|\ln|g(p^\alpha)||}{p^\alpha} \tag{5}$$

сходятся.

Очевидно, сходимость первых трех рядов (4) эквивалентна сходимости рядов

$$\sum_{g(p)\leqslant 0}\frac{\ln p}{p},\quad \sum_{\substack{g(p)>0\\ a_p<c}}\frac{a_p\ln p}{p},\quad \sum_{\substack{g(p)>0\\ a_p\geqslant 0}}\frac{\ln p}{p},\quad \sum_{g(p)\neq 0}\frac{a_p}{p}, \tag{6}$$

а первых трех рядов (5) — сходимости рядов

$$\sum_{g(p)\geqslant 0}\frac{\ln p}{p},\quad \sum_{\substack{g(p)<0\\ a_p<c}}\frac{a_p\ln p}{p},\quad \sum_{\substack{g(p)<0\\ a_p\geqslant c}}\frac{\ln p}{p},\quad \sum_{g(p)\neq 0}\frac{a_p}{p}.$$

Будем считать, что $0^{it}=0$ для всех t, $\operatorname{sgn}^k x=0$ при $x=0$, $k=0$. Соответственно подобранные константы $c_1, c_2, \ldots$ зависят лишь от функции $g(m)$; B — число, не всегда одно и то же, ограниченное по модулю константой, которая зависит лишь от $g(m)$, если не оговорено другое.

В дальнейшем мы оценим быстроту сходимости функций распределения (1) к предельным законам для классов $M_0(c, \lambda)$, $M_1(c, \lambda)$. Для этого мы сначала оценим соответствующие характеристические преобразования с помощью следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{M}$ – *класс комплекснозначных мультипликативных функций* $f(m)$, *удовлетворяющих условиям*: а) $|f(m)|\leqslant 1$ *для всех целых положительных* m, б) *для всякой функции* $f(m)\in\mathfrak{M}$ *существует такое число* $\varkappa=\varkappa_f$, *что ряд по всем простым* p

$$\sum_p |f(p)-\varkappa| \frac{\ln p}{p}$$

сходится, причем суммы этих рядов для всех $f\in\mathfrak{M}$ *равномерно ограничены. Тогда*

$$\sum_{m\leqslant x} f(m)=\frac{x(\ln x)^{\varkappa-1}}{\Gamma(\varkappa)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\varkappa}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)+Bx\sqrt{\frac{\ln\ln x}{\ln x}}$$

равномерно по всем функциям $f\in\mathfrak{M}$ *и* $x\geqslant 3$. *Здесь* Γ *означает гамма-функцию Эйлера.*

Очевидно, $|\varkappa|\leqslant 1$. Формула справедлива и при $\varkappa=-1;\ 0$, если будем считать $1/\Gamma(\varkappa)=0$.

Доказательство см. в [3].

Лемма 3. *Если* $g(m)\in M_0(c,\lambda)$, *то характеристические преобразования функции распределения*

$$F_n(x)=\frac{1}{n}N\left\{m\leqslant n,\ g(m)<|x|^{|\lambda|(\ln\ln n)^{1/2}}\ln^{\lambda} n\,\mathrm{sgn}\,x\right\}$$

равны

$$w_{kF_n}(t)=e^{-it(\ln\ln n)^{1/2}\mathrm{sgn}\,\lambda}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}|g(m)|^{it|\lambda|^{-1}(\ln\ln n)^{-1/2}}\mathrm{sgn}^k g(m)=$$

$$=e^{-t^2/2}w_{kF_n}(0)+\frac{B|t|(1+t^2)}{\sqrt{\ln\ln n}}e^{-t^2/4}+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}} \tag{7}$$

при $|t|\leqslant c_1(\ln\ln n)^{1/2}$, *где* c_1 – *достаточно малая постоянная*,

$$w_{kF_n}(t)=w_{kF_n}(0)+B|t|\sqrt{\ln\ln n} \tag{8}$$

для всех t. *При этом*

$$w_{kF_n}(0)=\omega_k+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}, \tag{9}$$

$$\omega_k=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right). \tag{10}$$

Доказательство. Подсчитаем сначала сумму

$$S_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}|g(m)|^{it}\mathrm{sgn}^k g(m)$$

с помощью леммы 2. Для этого заметим, что в силу неравенства

$$|e^{iu}-1|\leqslant|u|, \tag{11}$$

справедливого для всех вещественных u,

$$\sum_p \left| \, |g(p)|^{it} \operatorname{sgn}^k g(p) - e^{i\lambda t} \right| \frac{\ln p}{p} =$$

$$= \sum_{g(p)=0} \frac{\ln p}{p} + \sum_{g(p)\neq 0} |e^{it(\ln|g(p)|-\lambda)} \operatorname{sgn}^k g(p) - 1| \frac{\ln p}{p} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{g(p)\leqslant 0} \frac{\ln p}{p} + |t| \sum_{\substack{g(p)>0 \\ a_p<c}} \frac{a_p \ln p}{p} + 2 \sum_{\substack{g(p)>0 \\ a_p\geqslant c}} \frac{\ln p}{p}.$$

Из (6) следует, что к функциям $|g(m)|^{it} \operatorname{sgn}^k g(m)$, $k=0, 1$; $|t| \leqslant c_1$, c_1 — любая постоянная, применима лемма 2 с $\varkappa = e^{i\lambda t}$. Из этой леммы имеем, что

$$S_n(t) = \frac{(\ln n)^{e^{i\lambda t}-1}}{\Gamma(e^{i\lambda t})} \prod_p \chi_{kp}(t) + B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}} \tag{12}$$

где

$$\chi_{kp}(t) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{e^{i\lambda t}} \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|g(p^\alpha)|^{it} \operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right) \tag{13}$$

и оценка равномерна по t, $|t| \leqslant c_1$.

Дальше будем считать, что c_1 — достаточно малая. В силу (11) имеем, что

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{e^{i\lambda t}} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{e^{i\lambda t}}{l} \frac{(-1)^l}{p^l} = 1 - \frac{e^{i\lambda t}}{p} + \frac{B|t|}{p^2} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{e^{i\lambda t}-1}{p}\right) + \frac{B|t|}{p^2}.$$

Применяя опять (11) к слагаемым суммы в (13) при $\alpha \geqslant 2$, получаем, что

$$\chi_{kp}(t) = \chi_{kp}(0) + \rho_{kp}(t), \tag{14}$$

где

$$\rho_{kp}(t) = \sigma_{kp}(t) + B|t| \left(\frac{1}{p^2} + \sum_{\substack{\alpha=2 \\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty} \frac{|\ln|g(p^\alpha)||}{p^\alpha}\right),$$

$$\sigma_{kp}(t) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{(|g(p)|^{it} - 1)\operatorname{sgn}^k g(p) - (e^{i\lambda t} - 1)}{p}.$$

В силу (11) справедливы следующие оценки:

$$\sigma_{kp}(t) = \begin{cases} \dfrac{B|t|}{p}, & \text{если} \quad g(p) = 0, \\ \dfrac{B|t|a_p}{p}, & \text{если} \quad g(p)\neq 0,\ k=0, \quad \text{или} \quad g(p)>0,\ k=1, \\ \dfrac{B|t|\left(|\ln|g(p)||+1\right)}{p}, & \text{если} \quad g(p)<0,\ k=1. \end{cases}$$

Отсюда, вследствие (14) и определения $M_0(c, \lambda)$, вытекает, что $|\rho_{kp}(t)| < \frac{1}{2}\chi_{kp}(0)$, $\chi_{kp}(0) > \frac{1}{2}$ при $p > c_2$ и

$$\prod_p \chi_{kp}(t) = \prod_{p \leqslant c_2} \left(\chi_{kp}(0) + \rho_{kp}(t)\right) \cdot \prod_{p > c_2} \chi_{kp}(0) \left(1 + \frac{\rho_{kp}(t)}{\chi_{kp}(0)}\right) =$$

$$= \left(\prod_p \chi_{kp}(0) + B|t|\right) \exp\left\{\sum_{p > c_2} \ln\left(1 + \frac{\rho_{kp}(t)}{\chi_{kp}(0)}\right)\right\} =$$

$$= (\omega_k + B|t|) \exp\left\{B|t| \left(\sum_{g(p)=0} \frac{1}{p} + \sum_{g(p)\neq 0} \frac{a_p}{p} + \sum_{g(p)<0} \frac{|\ln|g(p)||}{p} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{g(p)<0} \frac{1}{p} + \sum_p \frac{1}{p^2} + \sum_p \sum_{\substack{\alpha=2 \\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty} \frac{|\ln|g(p^\alpha)||}{p^\alpha}\right)\right\} =$$

$$= (\omega_k + B|t|) \exp\left\{B|t| \left(\sum_{g(p)\leqslant 0} \frac{1}{p} + \sum_{g(p)\neq 0} \frac{a_p}{p} + \sum_p \frac{1}{p^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_p \sum_{\substack{\alpha=2 \\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty} \frac{|\ln|g(p^\alpha)||}{p^\alpha}\right)\right\} = \omega_k + B|t|. \qquad (15)$$

Подставляя $t|\lambda|^{-1}(\ln\ln n)^{-1/2}$ вместо t из (15) и (12), хорошо известных свойств Г-функции и неравенств

$$\left|e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2}\right| \leqslant \frac{|u|^3}{6}\,, \quad |e^z - 1| \leqslant |z|e^{|z|},$$

справедливых для всех вещественных u и комплексных z, выводим, что при $|t| \leqslant c_1|\lambda|(\ln\ln n)^{1/2}$

$$w_{kF_n}(t) = \frac{\exp\left\{\left(e^{it(\ln\ln n)^{-1/2}\operatorname{sgn}\lambda} - 1\right)\ln\ln n - it\sqrt{\ln\ln n}\operatorname{sgn}\lambda\right\}}{\Gamma\left(e^{it(\ln\ln n)^{-1/2}\operatorname{sgn}\lambda}\right)} \times$$

$$\times\left(\omega_k + \frac{B|t|}{\sqrt{\ln\ln n}}\right) + B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}} = \frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2} + \frac{B|t|^3}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)}{1 + \frac{B|t|}{\sqrt{\ln\ln n}}}\left(\omega_k + \frac{B|t|}{\sqrt{\ln\ln n}}\right) +$$

$$+ B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}} = \left\{e^{-t^2/2} + e^{-t^2/2}\left(\exp\frac{B|t|^3}{\sqrt{\ln\ln n}} - 1\right)\right\}\left(\omega_k + \frac{B|t|}{\sqrt{\ln\ln n}}\right) +$$

$$+ B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}} = \left\{e^{-t^2/2} + \frac{B|t|^3}{\sqrt{\ln\ln n}}\exp\left(t^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{B|t|}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)\right)\right\} \times$$

$$\times\left(\omega_k + \frac{B|t|}{\sqrt{\ln\ln n}}\right) + B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}} =$$

$$= \omega_k e^{-t^2/2} + \frac{B|t|(1+t^2)}{\sqrt{\ln\ln n}} e^{-t^2/4} + B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\,,$$

если c_1 — достаточно мало. В частности,

$$w_{kF_n}(0)=\omega_k+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}.$$

Поэтому

$$w_{kF_n}(t)=w_{kF_n}(0)\,e^{-t^2/2}+\frac{B\,|t|\,(1+t^2)}{\sqrt{\ln\ln n}}\;e^{-t^2/4}+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}.$$

Оценку (8) получим непосредственно из определения $w_{kF_n}(t)$. В силу (11) для любых вещественных t

$$w_{kF_n}(t)=\frac{1}{n}\,(1+B\,|t|\,\sqrt{\ln\ln n})\sum_{\substack{m=1\\ g(m)\neq 0}}^{n}\left(1+B\,|t|\,\frac{\big|\ln|g(m)|\big|}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)\operatorname{sgn}^k g(m). \quad (16)$$

В силу сходимости рядов (4) и хорошо известной оценки

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=B\ln\ln n$$

находим:

$$\sum_{\substack{m=1\\ g(m)\neq 0}}^{n}\big|\ln|g(m)|\big|\leqslant\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{p^\alpha\,\|\,m\\ g(p^\alpha)\neq 0}}\big|\ln|g(p^\alpha)|\big|\leqslant\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant n\\ g(p^\alpha)\neq 0}}\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]\big|\ln|g(p^\alpha)|\big|\leqslant$$

$$\leqslant n\sum_{\substack{p\leqslant n\\ g(p)\neq 0}}\frac{\big|\ln|g(p)|\big|}{p}+n\sum_{p}\sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{\big|\ln|g(p^\alpha)|\big|}{p^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant n\sum_{g(p)\neq 0}\frac{a_p}{p}+n\,|\lambda|\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}+Bn=Bn\ln\ln n.$$

Подставляя эту оценку в (16), заключаем, что справедлива оценка (8).

Лемма 4. *Если* $g(m)\in M_1(c,\lambda)$, *то характеристические преобразования функции распределения*

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\,N\left\{m\leqslant n,\ g(m)<|x|^{|\lambda|(\ln\ln n)^{-1/2}}\ln^\lambda n\,\operatorname{sgn}x\right\}$$

равны:

$$w_{0F_n}(t)=e^{-it(\ln\ln n)^{1/2}\operatorname{sgn}\lambda}\,\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}|g(m)|^{it|\lambda|^{-1}(\ln\ln n)^{-1/2}}=$$

$$=e^{-t^2/2}\,w_{0F_n}(0)+\frac{B\,|t|\,(1+t^2)}{\sqrt{\ln\ln n}}\;e^{-t^2/4}+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}},$$

$$w_{1F_n}(t)=e^{-it(\ln\ln n)^{1/2}\operatorname{sgn}\lambda}\,\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}|g(m)|^{it|\lambda|^{-1}(\ln\ln n)^{-1/2}}\operatorname{sgn}g(m)=$$

$$=B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}$$

при $|t|\leqslant c_3(\ln\ln n)^{1/2}$, c_3 — *достаточно малая постоянная,*

$$w_{kF_n}(t)=w_{kF_n}(0)+B\,|t|\,\sqrt{\ln\ln n}$$

для всех t. При этом

$$w_{kF_n}(0)=\omega_k+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}},$$

$$\omega_0=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\substack{\alpha=1\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{p^\alpha}\right),\quad \omega_1=0. \tag{17}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3. В этом случае сумму

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}|g(m)|^{it}\operatorname{sgn}^k g(m)$$

оцениваем с помощью леммы 2, полагая $\varkappa=e^{i\lambda t}$ при $k=0$, $\varkappa=-e^{i\lambda t}$ при $k=1$.

Теорема 1. *Если $g(m)\in M_0(c,\lambda)$, то равномерно по x и $n\geqslant c_4$*

$$F_n(x)=\frac{1}{n}N\left\{m\leqslant n,\ g(m)<|x|^{|\lambda|(\ln\ln n)^{1/2}}\ln^\lambda n\operatorname{sgn}x\right\}=$$

$$=\Phi(x)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}},$$

где

$$\Phi(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)G(-\ln x) & \text{при}\quad x>0,\\ \frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)G\big(-\ln(-x)\big) & \text{при}\quad x<0,\end{cases}$$

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du, \tag{18}$$

ω_0 и ω_1 определены формулой (10).

Доказательство. Из определения величин ω_0, ω_1 следуют неравенства $0\leqslant\omega_1\leqslant\omega_0\leqslant 1$. Заметим, далее, что для функций класса $M_0(c,\lambda)$ всегда $\omega_0>0$. Равенство $\omega_0=\omega_1$ справедливо тогда и только тогда, когда $g(p^\alpha)\geqslant 0$ для всех p^α, т.е. $g(m)\geqslant 0$.

Пусть a_0, a_1 – вещественные числа, $|a_1|\leqslant a_0\leqslant 1$. Простой подсчет показывает, что характеристические преобразования функции распределения

$$F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}(a_0+a_1)G(-\ln x) & \text{при}\quad x>0,\\ \frac{1}{2}(a_0-a_1)G\big(-\ln(-x)\big) & \text{при}\quad x<0\end{cases} \tag{19}$$

равны

$$w_{kF}(t)=a_k e^{-t^2/2}\qquad (k=0,\ 1).$$

Случай $g(m)\geqslant 0$ и $x<0$ – тривиален, т.к. тогда $F_n(x)=\Phi(x)=0$, $\omega_0-\omega_1=0$.

Поэтому достаточно оценить $F_n(x)-\Phi(x)$ для $x>0$, когда $g(m)\geqslant 0$, и для всех x, когда $g(m)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. В первом случае $\beta_{0\Phi}>0$, а во втором $\beta_{0\Phi}>0$, $\beta_{1\Phi}>0$.

Вместо разности $F_n(x)-\Phi(x)$ мы оценим сначала, воспользовавшись леммой 1, разность $F_n(x)-\Phi_n(x)$, где $\Phi_n(x)$ — функция распределения, соответствующая характеристическим преобразованиям

$$w_{k\Phi_n}(t)=w_{kF_n}(0)\,e^{-t^2/2} \qquad (k=0,\ 1).$$

Если $\beta_{k\Phi}>0$, то в силу (9)

$$\beta_{k\Phi_n}=\beta_{kF_n}=\frac{1}{2}\left(w_{0F_n}(0)+(-1)^k w_{1F_n}(0)\right)=\beta_{k\Phi}+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}},$$

следовательно, $\beta_{k\Phi_n}>c_5>0$ при $n\geqslant c_4$. В силу (8)

$$W_{kF_n\Phi_n}(t)=2\,(1-e^{-t^2/2})+B\,|\,t\,|\sqrt{\ln\ln n} \tag{20}$$

для всех t. Для $|\,t\,|\leqslant c_1\,(\ln\ln n)^{1/4}$ в силу (7)

$$W_{kF_n\Phi_n}(t)=\frac{B\,|\,t\,|\,(1+t^2)}{\sqrt{\ln\ln n}}\,e^{-t^2/4}+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}. \tag{21}$$

Если L_k имеет то же значение для F_n, Φ_n, что и в лемме 1, то из этой леммы при $T=c_1\,(\ln\ln n)^{1/2}$, $\varepsilon=(\ln n)^{-1}$ выводим

$$L_k=\frac{B}{T}+B\left(\int_0^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{T}\,|\,W_{kF_n\Phi_n}(t)\,|\,\frac{dt}{t}\right).$$

Применяя для оценки первого интеграла формулу (20), а для оценки второго — (21), получаем:

$$L_k=\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}+B\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1-e^{-t^2/2}}{t}+\sqrt{\ln\ln n}\right)dt+$$

$$+B\int_{\varepsilon}^{T}\left(\frac{1+t^2}{\sqrt{\ln\ln n}}\,e^{-t^2/4}+\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\,\frac{1}{t}\right)dt=$$

$$=\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}+B\varepsilon\sqrt{\ln\ln n}+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\ln T\right)=\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что из (19) и (9) следует

$$\Phi_n(x)=\Phi(x)+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}.$$

Теорема 2. *Если $g(m)\in M_1(c,\lambda)$, то равномерно по x и $n\geqslant c_6$*

$$\frac{1}{n}\,N\left\{m\leqslant n,\ g(m)<|\,x\,|^{|\lambda|(\ln\ln n)^{1/2}}\ln^{\lambda} n\,\mathrm{sgn}\,x\right\}=\Psi(x)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}},$$

где

$$\Psi(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}\,\omega_0 G(-\ln x) & \textit{при}\quad x>0,\\ \frac{1}{2}\,\omega_0 G\left(-\ln(-x)\right) & \textit{при}\quad x<0,\end{cases}$$

ω_0 определяется формулой (10), *а $G(x)$ — формулой* (18).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, только лемма 3 заменяется леммой 4.

Мы не использовали полной силы леммы 2. При дополнительных предположениях относительно функций $g(m)$ мы можем в интегральных законах получить более точные оценки остаточных членов типа асимптотических разложений и больших уклонений.

Изложенный метод позволяет исследовать и аналогичные классы мультипликативных функций с $\lambda=0$.

В заключение приведем несколько примеров. Пусть $\mu(m)$ – функция Мёбюса; $\omega(m)$ – число различных простых делителей m, $\Omega(m)$ – число всех простых делителей m, причем кратные делители считаются столько раз, какова их кратность; $\tau(m)$ – число натуральных делителей m.

Функции $\mu(m)\,\tau(m)$, $(-1)^{\omega(m)}\,\tau(m)$, $(-1)^{\Omega(m)}\,\tau(m)$ принадлежат классу $M_1(1, \ln 2)$. Из теоремы 2 следует, что

$$\frac{1}{n}\,N\left\{m\leqslant n,\ \mu(m)\,\tau(m)<|x|^{\ln 2\,(\ln\ln n)^{1/2}}(\ln n)^{\ln 2}\operatorname{sgn} x\right\}=$$

$$=\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}+\begin{cases}1-\frac{3}{\pi^2}\,G(-\ln x) & \text{при} \quad x>0,\\ \frac{3}{\pi^2}\,G\big(-\ln(-x)\big) & \text{при} \quad x<0;\end{cases}$$

$$\frac{1}{n}\,N\left\{m\leqslant n,\ (-1)^{\omega(m)}\,\tau(m)<|x|^{\ln 2\,(\ln\ln n)^{1/2}}(\ln n)^{\ln 2}\operatorname{sgn} x\right\}=$$

$$=\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}+\begin{cases}1-\frac{1}{2}\,G(-\ln x) & \text{при} \quad x>0,\\ \frac{1}{2}\,G\big(-\ln(-x)\big) & \text{при} \quad x<0;\end{cases}$$

последняя формула справедлива при замене $\omega(m)$ на $\Omega(m)$.

Функция $\mu(m)\,(-1)^{\omega(m)}\,\tau(m)\in M_0(1, \ln 2)$. Кроме того, она неотрицательна. Из теоремы 1 получаем, что при $x>0$

$$\frac{1}{n}\,N\left\{m\leqslant n,\ \mu(m)\,(-1)^{\omega(m)}\,\tau(m)<|x|^{\ln 2\,(\ln\ln n)^{1/2}}(\ln n)^{\ln 2}\right\}=$$

$$=1-\frac{6}{\pi^2}\,G(-\ln x)+\sqrt{\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}}.$$

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
3.VI.1970

Литература

1. А. Бакштис, О предельных законах распределения мультипликативных арифметических функций, Liet. mat. rink., VIII (1968), 5–39, 201–219, 643–680.

2. В. М. Золотарев, Общая теория перемножения независимых случайных величин, ДАН СССР, 142, (1962), 788–791.

3. Й. Кубилюс, Метод производящих рядов Дирихле в теории распределения арифметических аддитивных функций. I, Liet. mat. rink., XI., № 1 (1971), 125–134.

MULTIPLIKATYVINIŲ FUNKCIJŲ REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMAS

J. Kubilius, Z. Juškys

(*Reziumė*)

Tegul $g(m)$ — reali multiplikatyvinė aritmetinė funkcija. Tarkime, kad eilutės

$$\sum_{g(p)\leqslant 0}\frac{\ln p}{p},\quad \sum_{\substack{g(p)>0\\ a_p<c}}\frac{a_p\ln p}{p},\quad \sum_{\substack{g(p)>c\\ a_p\geqslant c}}\frac{\ln p}{p},\quad \sum_{g(p)\neq 0}\frac{a_p}{p},$$

$$\sum_p \sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{\left|\ln|g(p^\alpha)|\right|}{p^\alpha}, \tag{1}$$

kur $a_p=\left|\ln|g(p)|-\lambda\right|$ ir sumuojama pagal pirminius skaičius, konverguoja, tinkamai parinkus konstantas $\lambda\neq 0$ ir $c>0$. Tada visiems x ir $n\geqslant 3$ skaičius natūrinių skaičių $m\leqslant n$, kuriems

$$g(m)<|x|^{|\lambda|(\ln\ln n)^{1/2}}\ln^\lambda n\operatorname{sgn} x,$$

lygus

$$n\Phi(x)+\frac{Bn}{\sqrt{\ln\ln n}}.$$

Čia daugiklis B absoliutiniu didumu yra aprėžtas konstantos, priklausančios tik nuo funkcijos $g(m)$,

$$\Phi(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)G(-\ln x), & \text{kai } x>0,\\ \frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)G\big(-\ln(-x)\big), & \text{kai } x<0,\end{cases}$$

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\,du,$$

$$\omega_k=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)\qquad (k=0,\ 1).$$

Analogiškas rezultatas įrodytas ir funkcijoms $g(m)$, patenkinančioms sąlygas, kurios gaunamos iš (1), pakeitus $g(p)>0$ nelygybe $g(p)<0$ ir $g(p)\leqslant 0$ nelygybe $g(p)\geqslant 0$.

ÜBER DIE VERTEILUNG DER WERTE VON MULTIPLIKATIVEN FUNKTIONEN

J. Kubilius, Z. Juškys

(*Zusammenfassung*)

Es sei $g(m)$ eine reelle multiplikative zahlentheoretische Funktion. Wir nehmen an, daβ die Reihen über Primzahlen

$$\sum_{g(p)\leqslant 0}\frac{\ln p}{p},\quad \sum_{\substack{g(p)>0\\ a_p<c}}\frac{a_p\ln p}{p},\quad \sum_{\substack{g(p)>0\\ a_p\geqslant c}}\frac{\ln p}{p},\quad \sum_{g(p)\neq 0}\frac{a_p}{p},$$

$$\sum_p \sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{\left|\ln|g(p^\alpha)|\right|}{p^\alpha} \tag{1}$$

bei geeigneten Konstanten $\lambda \neq 0$, $c>0$ konvergieren, wobei $a_p = \big| \ln |g(p)| - \lambda \big|$ ist. Unter diesen Bedingungen ist für alle x und $n \geqslant 3$ die Anzahl der positiven ganzen Zahlen $m \leqslant n$, welche die Ungleichung

$$g(m) < |x|^{|\lambda| (\ln \ln n)^{1/2}} \ln^{\lambda} n \operatorname{sgn} x$$

genügen, gleich

$$n\Phi(x) + \frac{Bn}{\sqrt{\ln \ln n}}.$$

Dem Betrage nach ist der Multiplikator begrenzt bei einer Konstante, die nur von der Funktion $g(m)$ abhängt. Wir haben gesetzt

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) G(-\ln x) & \text{für } x>0, \\ \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) G\left(-\ln(-x)\right) & \text{für } x<0, \end{cases}$$

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du,$$

$$\omega_k = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right) \qquad (k=0,\ 1).$$

Es gilt ein analoges Resultat, wenn wir in den Bedingungen (1) $g(p) \leqslant 0$ durch $g(p) \geqslant 0$ und $g(p) > 0$ durch $g(p) < 0$ ersetzen.