УДК 519.214

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

П. Сурвила

1. Обозначения и предварительные замечания

Пусть

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \tag{1}$$

последовательность независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и конечными абсолютными моментами третьего порядка. Обозначим через

$$\sigma_i^2 = D\xi_i, \qquad \alpha_{3i} = E\xi_i^3, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \qquad B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

$$\Phi_{3n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du + \frac{(1-x^2)\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}}{6B_n^3\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{3i}\,.$$

Пусть $g(x)$ – интегрируемая по Риману на интервале (a, b) функция, равная нулю вне этого интеграла, и

$$S(g) = \int_a^b g(x)\,dx \neq 0.$$

Положим

$$Y_n = Y_n(g) = \sum_{j=1}^{n} g(S_j).$$

В работе [2], используя метод моментов, получены предельные распределения для соответствующим образом нормированной последовательности $\{Y_n\}$, когда случайные величины последовательности (1.1) распределены одинаково, и предельным распределением для нормированных частичных сумм является устойчивый закон с показателем α, $(0<\alpha\leqslant 2)$. При этом там требуются соответствующей быстроты сходимости. В частности, там доказано, что если случайные величины последовательности (1.1) распределены одинаково с характеристической функцией $f(t)$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |f(t)| < 1,$$

то предельным распределением последовательности

$$\left\{\frac{\sigma Y_n}{S(g)\sqrt{n}}\right\}$$

(здесь $\sigma^2 = D\xi_i$, $i=1, 2, \ldots$), является функция распределения

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du, & x > 0. \end{cases}$$

В настоящей заметке тем же методом упомянутый результат распространяется на один класс неодинаково распределенных случайных величин, который определяется условиями A и B.

Условие A. Существует положительное число $\sigma^2 < \infty$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2.$$

Условие В. Функции распределения нормированных частичных сумм удовлетворяют соотношениям

$$P\left\{\frac{S_n}{B_n} < x\right\} = \Phi_{3n}(x) + o\left(\frac{1}{B_n}\right).$$

Обозначим также через

$$C_n = \frac{S(g) B_n}{\sigma^2}, \qquad Z_n = Z_n(g) = \frac{Y_n}{C_n},$$

$$G_n(x) = P\{Z_n < x\}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

а также при $0 < a < \infty$ через $M_n(a)$ обозначим число тех k, $1 \leqslant k \leqslant n$ для которых $|S_k| < a$.

2. Результаты

Теорема 1. *Пусть функция* $g(x)$ *интегрируема по Риману на конечном интервале* (a, b) *и равна нулю вне этого интервала, и* $S(g) \neq 0$. *Если последовательность* (1.1) *удовлетворяет условиям* A *и* B, *то*

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x).$$

Теорема 2. *Если последовательность* (1.1) *удовлетворяет условиям* A *и* B, *то*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sigma^2 M_n(a)}{2aB_n} < x\right\} = G(x).$$

Пусть $g_1(x)$ и $g_2(x)$ интегрируемые по Риману функции на конечном интервале (a, b) и равные нулю вне этого интервала и пусть

$$S(g_i) = \int\limits_a^b g_i(x)\, dx \neq 0, \qquad i = 1, 2.$$

Обозначим через

$$Y_n^{(i)} = \sum_{j=1}^n g_i(S_j), \qquad C_n^{(i)} = \frac{S(g_i) B_n}{\sigma^2}, \qquad Z_n^{(i)} = \frac{Y_n^{(i)}}{|C_n^{(i)}|}, \qquad i = 1, 2,$$

$$G_n(x, y) = P\{Z_n^{(1)} < x,\ Z_n^{(2)} < y\}, \qquad u = 1, 2, \ldots$$

Теорема 3. *Если последовательность* (1.1) *удовлетворяет условиям* A и B, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n^{(1)}}{Z_n^{(2)}} = 1$$

по вероятности и

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x, y) = G\left(\min\{x, y\}\right).$$

Замечания.

1) Теорема вторая является следствием теоремы первой. Это сразу видно, если взять

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-a, a), \\ 0, & x \in (-a, a). \end{cases}$$

При этом получим $S(g) = 2a$ и

$$\sum_{j=1}^{n} g(S_j) = M_n(a).$$

2) Условие A является сильно сужающим класс случайных величин, но при использовании метода моментов вряд ли от него можно отказаться. Мне это не представляется возможным.

3) Условие B в случае неодинаково распределенных случайных величин можно заменить, например, условиями:

B_1) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n} E\{|\xi_i|^3\} < \infty,$$

B_2) для каждого $\varepsilon > 0$,

$$\int\limits_{|t|>\varepsilon} \prod_{i=1}^{n} |f_i(t)|\, dt = 0\left(\frac{1}{B_n^2}\right),$$

где

$$f_j(t) = E\{\exp(it\xi_j)\},$$

(см. [3], теорема 2), а также условиями теоремы 2 или теоремы 3 работы [4], из которых следует условие B. В случае одинаково распределенных случайных величин эквивалентные условию B условия можно найти в теореме 1 работы [1].

3. Вспомогательные предложения

Лемма 1. *Если выполнено условие* B *и* $x_1 < x_2$ — *конечные числа, то*

$$P\{x_1 \leqslant S_n > x_2\} = \frac{x_2 - x_1}{B_n\sqrt{2\pi}} + o\left(\frac{1}{B_n}\right).$$

Доказательство. Когда выполнено условие B, то

$$P\{x_1 \leqslant S_n < x_2\} = P\left\{\frac{x_1}{B_n} \leqslant \frac{S_n}{B_n} < \frac{x_2}{B_n}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1 B_n^{-1}}^{x_2 B_n^{-1}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du +$$

$$+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{3i}}{6B_n^3\sqrt{2\pi}} \left\{\left(1-\frac{x_2^2}{B_n^2}\right)\exp\left\{-\frac{x_2^2}{2B_n^2}\right\} - \left(1-\frac{x_1^2}{B_n^2}\right)\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2B_n^2}\right\}\right\} + o\left(\frac{1}{B_n}\right). \tag{3.1}$$

При $0 \leqslant z \leqslant 1$ имеем $1-e^{-z} \leqslant z$. Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1 B_n^{-1}}^{x_2 B_n^{-1}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = \frac{x_2 - x_1}{B_n\sqrt{2\pi}} + r_1(n), \tag{3.2}$$

где

$$|r_1(n)| \leqslant \frac{1}{B_n\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{2B_n^2}\, dx = \frac{x_2^3 - x_1^3}{6B_n^3\sqrt{2\pi}}$$

при $\max\{|x_1|, |x_2|\} \leqslant B_n\sqrt{2}$.

Используя теорему о средних значениях, получаем:

$$\left|\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2B_n^2}\right\} - \exp\left\{-\frac{x_2^2}{2B_n^2}\right\}\right| \leqslant \frac{x_2 - x_1}{B_n^2} \max\{|x_1|, |x_2|\},$$

и

$$\left|\frac{x_1^2}{B_n^2}\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2B_n^2}\right\} - \frac{x_2^2}{B_n^2}\exp\left\{-\frac{x_2^2}{2B_2^2}\right\}\right| \leqslant \frac{x_2 - x_1}{B_n^2}\left\{2\max\{|x_1|, |x_2|\} +\right.$$

$$\left. + \frac{\max\{|x_1|^3, |x_2|^3\}}{B_n^2}\right\}.$$

Применяя эти оценки, получаем соотношение

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{3i}}{6B_n^3\sqrt{2\pi}} \left\{\exp\left\{-\frac{x_2^2}{2B_n^2}\right\}\cdot\left(1-\frac{x_2^2}{B_n^2}\right) - \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2B_n^2}\right\}\cdot\left(1-\frac{x_1^2}{B_n^2}\right)\right\} = o\left(\frac{1}{B_n}\right). \tag{3.3}$$

Теперь, подставляя оценки (3.2) и (3.3) в соотношение (3.1), имеем:

$$P\{x_1 \leqslant S_n < x_2\} = \frac{x_2 - x_1}{B_n\sqrt{2\pi}} + o\left(\frac{1}{B_n}\right),$$

что и требовалось доказать.

Пусть $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{k+1} = b$ какое-нибудь разбиение интервала $[a, b]$, и $\delta_i = a_{i+1} - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Обозначим через

$$A_{j_1 j_2 \cdots j_m}(i_1 i_2 \cdots i_m) = \bigcap_{l=1}^{m} \{a_{i_l} \leqslant S_{j_l} < a_{i_l+1}\},$$

где $1 \leqslant j_l \leqslant n$ и $1 \leqslant i_l \leqslant k$, когда $1 \leqslant l \leqslant m$, и через Σ^* — суммирование по всем наборам $j_1 j_2 \dots j_m$ $(1 \leqslant j_l \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant m)$, в которых хотя бы два индекса совпадают.

Лемма 2. *Если выполняются условия A и B, то для любого фиксированного натурального m имеют место следующие соотношения:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^{2m}}{B_n^m} \sum_{1 \leqslant j_1 < \dots < j_m \leqslant n} P\{A_{j_1 \dots j_m}(i_1 \ \cdots \ i_m)\} = \frac{\prod_{i=1}^{m} \delta_i}{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) 2^{\frac{m-2}{2}}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^{2m}}{B_n^m} \sum{}^{*} P\{A_{j_1 \dots j_m}\}(i_1 \cdots i_m)\} = 0$$

для всех наборов индексов $i_1, i_2, \dots i_m$ $(1 \leqslant i_l \leqslant k,\ 1 \leqslant l \leqslant m)$.

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение леммы. Пусть $m \geqslant 2$. Обозначим для краткости

$$B_{j-i}^2 = B_j^2 - B_i^2 = \sum_{l=i+1}^{j} \sigma_l^2, \qquad (j > i),$$

$$S_{j-i} = S_j - S_i = \sum_{l=i+1}^{j} \xi_l, \qquad F_{j-i}(x) = P\{S_{j-i} < x\}.$$

Тогда при

$$1 \leqslant j_1 < j_2 < \ \cdots \ < j_m \leqslant n,$$

$$P\{A_{j_1 \dots j_m}(i_1 \ \cdots \ i_m)\} =$$

$$= \int_{a_{i_1}}^{a_{i_1+1}} dF_{j_1}(y_1) \int_{a_{i_2}-y_1}^{a_{i_2+1}-y_1} dF_{j_2-j_1}(y_2) \ \cdots \int_{a_{i_m}-y_1-\cdots-y_{m-1}}^{a_{i_m+1}-y_1-\cdots-y_{m-1}} dF_{j_m-j_{m-1}}(y_m).$$

Согласно лемме первой имеем:

$$\int_{a_{i_l}-y_1-\cdots-y_{l-1}}^{a_{i_l+1}-y_1-\cdots-y_{l-1}} dF_{j_l-j_{l-1}}(y_l) = \frac{\delta_{i_l}}{B_{j_l-j_{l-1}}\sqrt{2\pi}} + o\left(\frac{1}{B_{j_l-j_{l-1}}}\right).$$

Используя последнюю оценку, получаем:

$$P\{A_{j_1 \dots j_m}(i_1 \ \cdots \ i_m)\} = \frac{\prod_{l=1}^{m} \delta_{i_l}}{(\sqrt{2\pi})^m B_{j_1} B_{j_2-j_1} \cdots B_{j_m-j_{m-1}}} + R(j_1 \cdots j_m),$$

где

$$\sum_{1 \leqslant j_1 < \dots < j_m \leqslant n} |R(j_1 \ \cdots \ j_m)| \leqslant 2^{m-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < \dots < j_{m-1} \leqslant n} \times$$

$$\times \frac{1}{B_{j_1} B_{j_2-j_1} \cdots B_{j_{m-1}-j_{m-2}}} \sum_{l=1}^{n} o\left(\frac{1}{B_l}\right). \tag{3.4}$$

Известно, что при условии A $B_n^2 \sim \sigma^2 n$. Следовательно,

$$\frac{1}{B_n} \sum_{l=1}^{n} o\left(\frac{1}{B_l}\right) = o(1). \tag{3.5}$$

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^{2m}}{B_n^m} \sum_{1\leqslant j_1< \cdots <j_m\leqslant n} P\{A_{j_1\cdots j_m}(i_1 \cdots i_m)\} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m} \prod_{l=1}^{m} \delta_l \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\sigma^{2m}}{B_n^m} \sum_{1\leqslant j_1< \cdots <j_m\leqslant n} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{B_{j_1} B_{j_2-j_1} \cdots B_{j_m-j_{m-1}}} \right\} + \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\sigma^{2m}}{B_n^m} \sum_{1\leqslant j_1< \cdots <j_m\leqslant n} R(j_1 \cdots j_m \right\}. \tag{3.6}$$

Далее вычисляем первый предел.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^{2m}}{B_n^m} \sum_{1\leqslant j_1< \cdots <j_m\leqslant n} \frac{1}{B_{j_1} B_{j_2-j_1} \cdots B_{j_m-j_{m-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant j_1< \cdots <j_m\leqslant n} \frac{\left(\frac{\sigma^2}{B_n^2}\right)^m}{\sqrt{\frac{B_{j_1}^2}{B_n^2}} \cdot \sqrt{\frac{B_{j_2-j_1}^2}{B_n^2}} \cdots \sqrt{\frac{B_{j_m-j_{m-1}}^2}{B_n^2}}} =$$

$$= \int\int \cdots \int_{o\leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_m \leqslant 1} \frac{dt_1 dt_2 \cdots dt_m}{\sqrt{t_1(t_2-t_1) \cdots (t_m-t_{m-1})}}.$$

После замены переменных

$$t_1 = u_1 u_2 \dots u_m,$$

$$t_2 = u_1 u_2 \dots u_{m-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$t_{m-1} = u_1 u_2,$$

$$t_m = u_1,$$

область $\{0 \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_m \leqslant 1\}$ переходит в область $\{|0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]\}$. Так как якобиан

$$|J| = u_1^{m-1} u_2^{m-2} \cdots u_{m-1},$$

то получаем

$$I = \int\int \cdots \int_{0\leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_m \leqslant 1} \frac{dt_1 dt_2 \cdots dt_m}{\sqrt{t_1(t_2-t_1) \cdots (t_m-t_{m-1})}} =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \cdots \int_0^1 u_1^{\frac{m-2}{2}} \frac{u_2^{\frac{m-1}{2}-1}}{\sqrt{1-u_2}} \cdots \frac{u_m^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{1-u_m}} du_1 du_2 \cdots du_m =$$

$$= \int_0^1 u^{\frac{m-2}{2}} du \cdot \prod_{l=1}^{m-1} \int_0^1 u^{\frac{l}{2}-1} (1-u)^{\frac{1}{2}-1} du.$$

Но

$$\int_0^1 u^{\frac{m-2}{2}}\,du=\frac{2}{m},$$

а

$$\int_0^1 u^{\frac{l}{2}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}\,du=B\left(\frac{l}{2},\,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)},$$

следовательно,

$$I=\frac{2}{m}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{m-1}\prod_{l=1}^{m-1}\frac{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}=\frac{2(\sqrt{\pi})^m}{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^{2m}}{B_n^m}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_m\leqslant n}\frac{1}{B_{j_1}B_{j_2-j_1}\cdots B_{j_m-j_{m-1}}}=\frac{2(\sqrt{\pi})^m}{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}. \tag{3.7}$$

Используя теперь оценку (3.7) при $m-1$, а также соотношения (3.4) и (3.5), получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^{2m}}{B_n^m}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_m\leqslant n}R(j_1\cdots j_m)=0. \tag{3.8}$$

Теперь из выражения (3.6) согласно соотношениям (3.7) и (3.8) выводим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^{2m}}{B_n^m}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_m\leqslant n}P\,\{A_{j_1\cdots j_m}(i_1\cdots i_m)\}=\frac{\prod_{l=1}^{m}\delta_l}{m2^{\frac{m}{2}-1}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

При $m=1$ доказательство более простое.

Теперь докажем второе утверждение леммы.

Если $m=1$, то соответствующая Σ^* равна нулю. Следовательно, утверждение надо доказать только для $m\geqslant 2$.

Если $j_r=j_l$, то событие $\{a_{i_r}\leqslant s_{j_r}<a_{i_r+1},\ a_{i_l}\leqslant S_{j_l}<a_{i_l+1}\}$ невозможно, когда $a_{i_r}\neq a_{i_l}$, и равно $\{a_{i_r}\leqslant S_{j_r}<a_{i_r+1}\}$, когда $a_{i_r}=a_{i_l}$. Тогда при $j_r=j_l$ $(r<l)$ имеем

$$P\,\{A_{j_1\cdots j_m}(i_1\cdots i_m)\}=0,\ \text{когда}\ a_{i_r}\neq a_{i_l},$$

и

$$P\,\{A_{j_1\cdots j_m}(i_1\cdots i_m)\}=$$
$$=P\,\{a_{i_1}\leqslant S_{j_1}<a_{i_1+1},\ \ldots,\ a_{i_{l-1}}\leqslant S_{j_{l-1}}<a_{i_{l-1}+1},$$
$$a_{i_{l+1}}\leqslant S_{j_{l+1}}\leqslant a_{i_{l+1}+1},\ \ldots,\ a_{i_m}\leqslant S_{j_m}<a_{i_m+1}\},$$

когда $a_{i_r}=a_{i_l}$.

Расположив индексы $j_1, j_2, \ldots, j_{l-1}, j_{l+1}, \ldots, j_m$ в порядке возрастания и применив первое утверждение леммы, получим

$$\frac{1}{B_n^m}\sum_{\substack{1\leqslant j_1 j_2\cdots j_m\leqslant n\\ j_r=j_l}}P\,\{A_{j\cdots j_m}(i_1\cdots i_m)\}=O\left(\frac{1}{B_n}\right)$$

(здесь суммирование производится по тем наборам индексов $j_1 j_2 \ldots j_m$, в которых два индекса совпадают).

Суммы по наборам индексов $j_1, j_2 \ldots j_m$, в которых совпадают s $(s \geqslant 2)$ индексов, будут стремиться к нулю по тем же соображениям со скоростью $B_n^{-(s-1)}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^m} \sum{}^{*} P\{A_{j_1 \ldots j_m}(i_1 \; \cdots \; i_m)\} = 0$$

для любых наборов $i_1, i_2 \ldots i_m$. Этим второе утверждение леммы доказано.

4. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.

1) Рассмотрим случай ступеньчатой функции. Пусть

$$a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{k+1} = b,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ — действительные числа, и

$$g(x) = \begin{cases} \lambda_i & \text{при } a_i \leqslant x < a_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \\ 0 & \text{при } x \in [a, b). \end{cases}$$

Тогда

$$S(g) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta_i,$$

где $\delta_i = a_{i+1} - a_i$.

Определим случайные величины $T_j(i)$ следующим образом:

$$T_j(i) = \begin{cases} 1, & S_j \in [a_i, a_{i+1}), \\ 0, & S_j \in [a_i, a_{i+1}). \end{cases}$$

Очевидно,

$$g(S_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_j(i) \tag{4.1}$$

и

$$Y_n = \sum_{j=1}^{n} g(S_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_j(i). \tag{4.2}$$

Так как

$$\alpha_m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \, dG(x) = \begin{cases} (2s-1)!! & \text{при } m = 2s, \\ \dfrac{s! \, 2^s \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} & \text{при } m = 2s+1, \end{cases} \tag{4.3}$$

то нам достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} E\{Z_n^m\} = \alpha_m \text{ для } m = 1, 2, \ldots$$

Вычисляем первый момент случайной величины Z_n. Согласно соотношению (4.2) имеем:

$$E\{Y_n\} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} E\{T_j(i)\}.$$

Но так как

$$E\{T_j(i)\}=P\{A_j(i)\},$$

то согласно первому утверждению леммы второй получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{C_n}\sum_{j=1}^{n}P\{A_j(i)\}=\frac{\delta_i}{S(g)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.$$

Следовательно, используя это соотношение, а также соотношение (4.1) и (4.3), заключаем:

$$\lim_{n\to\infty}E\{Z_n\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\alpha_1. \tag{4.4}$$

Далее, при $m\geqslant 2$ из (4.2) имеем:

$$E\{Z_n^m\}=E\left\{\frac{1}{C_n^m}\left[\sum_{j=1}^{n}g(S_j)\right]^m\right\}=$$

$$=\frac{1}{C_n^m}\sum_{i_n\cdots i_m=1}^{k}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_m}\left\{\sum{}^{*}P\{A_{j_1\cdots j_m}(i_1\cdots i_m\right\}+$$

$$\left.+m!\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_m\leqslant n}P\{A_{j_1\cdots j_m}(i_1\cdots i_m)\}\right\}.$$

Теперь, используя лемму вторую, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}E\{Z_n^m\}=$$

$$=\frac{1}{[S(g)]^m}\sum_{i_1\cdots i_m=1}^{k}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_m}\frac{m!\prod_{l=1}^{m}\delta_{i_l}}{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)2^{\frac{m-2}{2}}}=\frac{(m-1)!}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)2^{\frac{m-2}{2}}}. \tag{4.5}$$

Но

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)=\begin{cases}(S-1)!\ \text{при}\ m=2s,\\ \frac{\sqrt{\pi}\,(2s-1)!!}{2^s}\ \text{при}\ m=2s+1,\end{cases}$$

следовательно,

$$\frac{(m-1)!}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)2^{\frac{m-2}{2}}}=\begin{cases}(2s-1)!!\ \text{при}\ m=2s,\\ s!\,2^s\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \text{при}\ m=2s+1.\end{cases}$$

Из соотношения (4.5) согласно последним равенствам и соотношению (4.3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}E\{Z_n^m\}=\alpha_m\ \text{для}\ m=2,\ 3,\ 4,\ \ldots \tag{4.6}$$

Утверждение теоремы для ступеньчатых функций следует из (4.4) и (4.6).

2) Пусть теперь $g(x)$, интегрируемая по Риману на интервале (a, b) функция, равная нулю вне этого интервала. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существуют

ступеньчатые функции $h(x)$ и $H(x)$, равные нулю вне интервала (a, b) и такие, что

$$h(x)\leqslant g(x)\leqslant H(x) \text{ и } 0\leqslant S(H)-S(h)<\varepsilon. \tag{4.7}$$

Если обозначить через

$$Y_n(h) = \sum_{j=1}^{n} h(S_j), \qquad Y_n(H) = \sum_{j=1}^{n} H(S_j),$$

$$C_n(h) = \frac{S(h)B_n}{\sigma^2}, \qquad C_n(H) = \frac{S(H)B_n}{\sigma^2},$$

то

$$Y_n(h)\leqslant Y_n\leqslant Y_n(H). \tag{4.8}$$

1) Пусть $S(g)>0$.

Если взять $\varepsilon<S(H)$, то из соотношения (4.7) следует, что

$$S(h)>S(H)-\varepsilon>0 \text{ и } S(H)<S(h)+\varepsilon.$$

Так как

$$S(h)\leqslant S(g)\leqslant S(H),$$

то и

$$S(H)-\varepsilon\leqslant S(g)\leqslant S(h)+\varepsilon.$$

Из последнего и (4.8) соотношений следуют неравенства

$$\frac{Y_n(h)}{C_n(h)\left[1+\frac{\varepsilon}{S(h)}\right]}\leqslant Z_n\leqslant \frac{Y_n(H)}{C_n(H)\left[1-\frac{\varepsilon}{S(H)}\right]},$$

а отсюда, в свою очередь, неравенства

$$P\left\{\frac{Y_n(H)}{C_n(H)}<x\left[1-\frac{\varepsilon}{S(H)}\right]\right\}\leqslant P\{Z_n<x\}\leqslant P\left\{\frac{Y_n(h)}{C_n(h)}<x\left[1+\frac{\varepsilon}{S(h)}\right]\right\}.$$

Переходя к пределу по $n\to\infty$ и используя доказанную теорему для ступеньчатых функций, имеем:

$$G\left(x\left[1-\frac{\varepsilon}{S(H)}\right]\right)\leqslant \varliminf_{n\to\infty} P\{Z_n<x\}\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} P\{Z_n<x\}\leqslant G\left(x\left[1+\frac{\varepsilon}{S(h)}\right]\right).$$

Из этих неравенств в силу произвольности ε следует, что

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x)=G(x). \tag{4.10}$$

2) Пусть $S(g)<0$.

В этом случае подбираем $\varepsilon>0$ такое, что $0<\varepsilon<-S(h)$ и чтобы выполнялись неравенства

$$-\varepsilon<S(h)-S(H)\leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $S(H)<0$. Но так как

$$Y_n(h)\leqslant Y_n\leqslant Y_n(H) \text{ и } S(h)\leqslant S(g)\leqslant S(H)<0,$$

то

$$|S(H)|\leqslant|S(g)|\leqslant|S(h)|.$$

Следовательно, имеем:

$$\frac{Y_n(h)}{|C_n(h)|} \leqslant \frac{Y_n}{|C_n|} \leqslant \frac{Y_n(H)}{|C_n(H)|}$$

или

$$\frac{Y_n(H)}{C_n(H)} \leqslant Z_n \leqslant \frac{Y_n(h)}{C_n(h)}.$$

Теперь, как и в первом случае, из неравенств

$$P\left\{\frac{Y_n(h)}{C_n(h)} < x\right\} \leqslant P\{Z_n < x\} \leqslant P\left\{\frac{Y_n(H)}{C_n(H)}\right\} < x$$

заключаем:

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x),$$

что вместе с соотношением (4. 10) завершает доказательство.

Доказательство теоремы третьей.

Пусть $g_1(x)$ и $g_2(x)$ функции, удовлетворяющие условиям теоремы. Прежде всего покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} E\{Z_n^{(1)}\cdot Z_n^{(2)}\} = 1. \tag{4.11}$$

Для этого рассмотрим ступеньчатые функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$, где

$$h_1(x) = \begin{cases} \lambda_i & \text{при } a_i \leqslant x < a_{i+1}, \qquad a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{k+1} = b, \\ 0 & \text{при } x \in [a, b], \end{cases}$$

и

$$h_2(x) = \begin{cases} \mu_i & \text{при } b_i \leqslant x < b_{i+1}, \qquad a = b_1 < b_2 < \cdots < b_{m+1} = b. \\ 0 & \text{при } x \in [a, b). \end{cases}$$

Докажем соотношение (4.11) для ступеньчатых функций $h_1(x)$ и $h_2(x)$. Имеем

$$E\{Z_n(h_1)\cdot Z_n(h_2)\} = \frac{1}{C_n^{(1)}C_n^{(2)}} \sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n} P\{A_{jj}(i, s)\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant n} P\{A_{j_1j_2}(i, s)\} + \sum_{1\leqslant j_2>j_1\leqslant n} P\{A_{j_1j_2}(i, s)\}\right\}\lambda_i\mu_s.$$

Как и при доказательстве леммы второй, получаем, что

$$P\{A_{jj}(i, s)\} = 0 \text{ при } [a_i, a_{i+1}] \cap [b_s, b_{s+1}) = \varnothing,$$

$$P\{A_{jj}(i, s)\} = P\{c_i \leqslant S_j < l_{i+1}\} \text{ при } [a_i\ a_{i+1}) \cap [b_s, b_{s+1}) = [c_i, c_{i+1}).$$

Используя вторoе утверждение леммы второй, легко получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{C_n^{(1)}C_n^{(2)}} \sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{m} \lambda_i\mu_s \sum_{j=1}^{n} P\{A_{jj}(i, s)\} = 0.$$

Заметив, что

$$P_{j_1j_2}(i, s) = P_{j_2j_1}(s, i),$$

согласно первому утверждению леммы второй заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{C_n^{(1)} C_n^{(2)}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{m} \lambda_i \mu_s \left\{ \sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant n} P\{A_{j_1 j_2}(i, s)\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{1\leqslant j_2<j_1\leqslant n} P\{A_{j_1 j_2}(i,s)\}\right\} = 1 = \alpha_2. \tag{4.12}$$

Последние равенства и показывают, что соотношение (4.11) верно для ступенчатых функций.

Если $g_1(x)$ и $g_2(x)$ не ступенчатые, то для любого $\varepsilon>0$ найдутся ступенчатые функции на интервале (a, b), и равные нулю вне этого интервала $h_1(x)$, $H_1(x)$, $h_2(x)$, $H_2(x)$ такие, что

$$h_1(x)\leqslant g_i(x)\leqslant H_i(x) \text{ и } 0\leqslant S(H_i)-S(h_i)<\varepsilon,\ i=1, 2.$$

Рассмотрим четыре случая.

1) $S(g_1)>0$ и $S(g_2)>0$.

В этом случае взяв $\varepsilon<\min\{S(H_1), S(H_2)\}$ и рассуждая как и при доказательстве теоремы первой, получим:

$$\frac{Z_n(h_i)}{1+\frac{\varepsilon}{S(h_i)}} \leqslant Z_n^{(i)} \leqslant \frac{Z_n(H_i)}{1-\frac{\varepsilon}{S(H_i)}}, \qquad i=1,\ 2.$$

Следовательно, согласно соотношению (4.12), получим

$$\left\{\left[1+\frac{\varepsilon}{S(h_1)}\right]\left[1+\frac{\varepsilon}{S(h_2)}\right]\right\}^{-1} \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} E\{Z_n^{(1)}\cdot Z_n^{(2)}\}\leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} E\{Z_n^{(1)}\cdot Z_n^{(2)}\}\leqslant\left\{\left[1-\frac{\varepsilon}{S(H_1)}\right]\left[1-\frac{\varepsilon}{S(H_2)}\right]\right\}^{-1}.$$

Отсюда согласно произвольности ε заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} E\{Z_n^{(1)}\cdot Z_n^{(2)}\}=1.$$

2) $S(g_1)<0$ и $S(g_2)<0$.

В этом случае взяв $-\varepsilon>\max\{S(H_1), S(H_2)\}$, получим:

$$S(H_1)<0 \text{ и } S(H_2)<0.$$

Следовательно,

$$|S(H_i)|\leqslant|S(g_i)|\leqslant|S(h_i)|, \qquad i=1,\ 2,$$

а также

$$Z_n(H_i)\leqslant Z_n^{(i)}\leqslant Z_n(h_i), \qquad i=1,\ 2.$$

Как и в первом случае, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} E\{Z_n^{(1)}\cdot Z_n^{(2)}\}=1.$$

3) $S(g_1)<0$, $S(g_2)>0$.

В этом случае, подобрав $0<\varepsilon<\min\{S(H_2), -S(H_1)\}$, получим:

$$Z_n(H_1)\leqslant Z_n^{(1)}\leqslant Z_n(h_1)$$

$$Z_n(h_2)\left[1+\frac{\varepsilon}{S(h_2)}\right]^{-1}\leqslant Z_n^{(2)}\leqslant Z_n(H_2)\left[1-\frac{\varepsilon}{S(H_2)}\right]^{-1}.$$

Перемножив эти неравенства и вычисляя предел по $n\to\infty$ математического ожидания $E\{Z_n^{(1)}\cdot Z_n^{(2)}\}$ согласно произвольности ε, получим соотношение (4.11).

Случай $S(g_1)>0$, $S(g_2)<0$ доказывается аналогично третьему случаю.

Далее, из соотношения (4.11) и теоремы первой следует, что

$$\lim_{n\to\infty} E\{[Z_n^{(1)}\cdot Z_n^{(2)}]^2\}=0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $N_1(\varepsilon)$, что при $n\geqslant N_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$E\{[Z_n^{(1)}-Z_n^{(2)}]^2\}<\varepsilon^4.$$

Так как при $0<\varepsilon<\delta$

$$P\left\{\left|\frac{Z_n^{(1)}}{Z_n^{(2)}}-1\right|^2<\varepsilon\right\}\geqslant P\{|Z_n^{(1)}-Z_n^{(2)}|^2<\varepsilon^3\}-P\{Z_n^{(2)}>\delta\},$$

а согласно неравенству Чебышева

$$P\{|Z_n^{(1)}-Z_n^{(2)}|^2<\varepsilon^3\}\geqslant 1-\frac{E\{[Z_n^{(1)}-Z_n^{(2)}]^2\}}{\varepsilon^3}\geqslant 1-\varepsilon,$$

то при $n>N_1(\varepsilon)$ и $\varepsilon<\delta$ имеем оценку

$$P\left\{\left|\frac{Z_n^{(1)}}{Z_n^{(2)}}-1\right|^2<\varepsilon\right\}\geqslant 1-\varepsilon-P\{Z_n^{(2)}<\delta\}.$$

Очевидно, для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>\varepsilon$, что

$$G(\delta)<\varepsilon.$$

Кроме того, согласно теореме первой для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $N_2(\varepsilon)$, что при $n\geqslant N_2(\varepsilon)$,

$$|P\{Z_n^{(2)}<\delta\}-G(\delta)|<\varepsilon.$$

Следовательно, для таких n имеет место оценка

$$P\{Z_n^{(2)}<\delta\}<2\varepsilon,$$

а при $n\geqslant\max\{N_1(\varepsilon),\ N_2(\varepsilon)\}$ оценка

$$P\left\{\left|\frac{Z_n^{(1)}}{Z_n^{(2)}}-1\right|^2<\varepsilon\right\}\geqslant 1-3\varepsilon,$$

что равносильно первому утверждению теоремы.

Далее, из теоремы первой заключаем, что при $xy\leqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{Z_n^{(1)}<x,\qquad Z_n^{(2)}<y\}=0.$$

Рассмотрим случай $0<x<y$. Имеем:

$$P\{Z_n^{(1)}<x,\ Z_n^{(2)}<y\}=P\{Z_n^{(1)}<x\}-P\{Z_n^{(1)}<x,\ Z_n^{(2)}\geqslant y\}.$$

Подобрав $\varepsilon>0$ такое, что $(1-\varepsilon)\,y>x$, получаем:

$$P\{Z_n^{(1)}<x,\ Z_n^{(2)}\geqslant y\}\leqslant P\left\{\left|\frac{Z_n^{(1)}}{Z_n^{(2)}}<\frac{x}{y}\right.\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\frac{Z_n^{(1)}}{Z_n^{(2)}}\leqslant 1-\varepsilon\right\}\leqslant P\left\{\left|\frac{Z_n^{(1)}}{Z_n^{(2)}}-1\right|\geqslant\varepsilon\right\}.$$

Согласно доказанному утверждению теоремы, отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P\{Z_n^{(1)}<x,\ Z_n^{(2)}\geqslant y\}=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x,\ y)=G(x)$$

при $x<y$.

При $0<y<x$ доказательство аналогично.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
9.II.1970

Литература

1. И. А. Ибрагимов, Об асимптотических разложениях Чебышева–Крамера, Теория вероят. и ее примен., 12, 3 (1967), 506–519.
2. Kallianpur, H. Robbins, The sequence of sums of independent random variables, Duke Mathematical Journal, 21, 2 (1954), 285–307.
3. В. В. Петров, Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероят. и ее примен., 4, 2 (1959), 220–224.
4. П. Сурвила, Асимптотические разложения для функции распределения нормированной суммы независимых случайных величин, Лит. матем. сб., 5, № 1 (1965), 143–155.

APIE NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ VIENO FUNKCIONALO RIBINĮ PASISKIRSTYMĄ

P. Survila

(*Reziumė*)

Tegul $g(x)$ integruojama Rymano prasme intervale $(a,\ b)$ funkcija ir lygi nuliui už jo ir tegul

$$S(g)=\int_0^b g(x)\,dx\neq 0.$$

Jeigu nepriklausomų atsitiktinių dydžių seka $\{\xi_i\}$ su $E\xi_i=0$ ir $E\,|\,\xi_i\,|^3<\infty$ tenkina sąlygas:

A) $\lim_{n\to\infty} D\xi_i=\sigma^2$, kur $0<\sigma^2<\infty$,

B) $$P\left\{\frac{S_n}{B_n}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}dn+\frac{(1-x^2)\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}}{6B_n^3\sqrt{2\pi}}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^3+o\left(\frac{1}{B_n}\right),$$

kur

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i \quad \text{ir} \quad B_n^2\sum_{i=1}^{n}D\xi_i,$$

tai

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sigma^2\sum_{j=1}^{n}g(S_j)}{S(g)B_n}<x\right\}=G(x),$$

kur

$$G(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}du, & x>0.\end{cases}$$

Be to, jei baigtiniam $a>0$ pažymėsime $M_n(a)$ – skaičių k, $1\leqslant k\leqslant n$, kuriems $|S_k|<a$, tai, esant patenkintoms A ir B sąlygoms,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sigma^2 M_n(a)}{2aB_n}<x\right\}=G(x).$$

ÜBER GRENZVERTEILUNG EINES FUNKTIONALS VON UNABHÄNG EN ZUFALLSGRÖβEN

P. Survila

(*Zusammenfassung*)

In vorliegendem Artikel werden die folgenden Sätze bewiesen.

1. Es sei $g(x)$ eine integrierbare Funktion, $(R)\int\limits_a^b g(x)\,dx\neq 0$, und $g(x)=0$, wenn $x\notin(a,b)$. Es sei $\{\xi_i\}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsgrößen mit den Mittelwerten $E\xi_i=0$, mit den Dispersionen $D\xi_i=\sigma_i^2$ und mit den absoluten Momenten 3-er Ordnung $E\,|\,\xi_i\,|^3<\infty$ für alle $i=1, 2, \ldots$. Wir setzen

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\qquad B_n^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2,$$

$$G(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^x \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}du, & x>0,\end{cases}$$

$$\Phi_{3n}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}du+\frac{(1-x^2)\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}}{6B_n^3\sqrt{2\pi}}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^3.$$

Wenn die Bedingungen

A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_i^2=\sigma^2,\qquad (0<\sigma<\infty),$

B) $P\left\{\frac{S_n}{B_n}<x\right\}=\Phi_{3n}(x)+o\left(\frac{1}{B_n}\right)$

erfüllt sind, dann ist die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sigma^2\sum\limits_{j=1}^{n} g(S_j)}{B_n\int\limits_a^b g(u)\,du}<x\right\}=G(x)$$

genügt.

2. Es sei $0<a<\infty$, und $M_n(a)$ ist die Zahl solcher k, $1\leqslant k\leqslant n$, für die $|S_k|<a$. Wenn die Bedingungen A und B erfüllt sind, dann ist die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sigma^2 M_n(a)}{2aB_n}<x\right\}=G(x)$$

genügt.