XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1971

УДК 513

О ДВИЖЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. П. Урбонас

В [2] рассмотрен вопрос о максимальном порядке групп, допускаемых пространством гиперплоскостных элементов с неусеченной аффинной связностью. Этот порядок равен точно n^2-n+2, $n\geqslant 7$. Осталось установить максимальный порядок групп, допускаемых указанным выше пространством с усеченной аффинной связностью. Настоящая статья — первый шаг в решении этого вопроса. А именно, здесь устанавливается, что в этом случае пространство гиперплоскостных элементов не может допускать групп движений порядка $r>n^2$, $n\geqslant 2$.

1. Движения в пространстве U_n. Пусть U_n — пространство гиперплоскостных элементов (x^i, u_k). Аффинная связность в U_n задается объектом ([1]) $\left(\Gamma^i_{jk}(x, u),\ C^{ij}_k\ (x,\ u)\right)$, $(i, j, k=1, 2, 3, \ldots, n)$, где Γ^i_{jk} — преобразуются по закону объекта аффинной связности и являются однородными функциями нулевого измерения относительно u_k; C^{ij}_k — тензор, компоненты которого являются однородными функциями минус первое измерение относительно u_k.

Связность называется усеченной, если $C^{ij}_k=0$.

В этой статье мы будем рассматривать только пространства U_n с усеченной симметрической $(\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj})$ связностью $\Gamma^i_{jk}(x,\ u)$.

Движениями пространства U_n являются такие точечные преобразования, относительно которых сохраняется аффинная связность. Для того, чтобы $v^i(x)$ определяло инфинитезимальное движение, оно должно удовлетворять уравнениям [2]:

$$D\Gamma^i_{jk}\equiv v^i_{,j,k}+v^p K^i_{jkp}-\Gamma^{i\cdot p}_{jk}\, v^s_{,p}\, u_s=0, \tag{1}$$

где D — символ производной Ли,

$_{,k}$ — означает ковариантную производную по x^k,

$_{\cdot k}$ — частное дифференцирование по u_k.

Обозначим $v^i_j=v^i_{,j}$. Тогда условия интегрируемости (1) уравнений запишутся:

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\text{а) уравнение } DK^i_{jkl}=0 \text{ и все полученные из него последовательным ко-}\\ \text{вариантным дифференцированием по } x^s \text{ до порядка } \alpha \text{ под знаком } D;\\ \left(\frac{1}{2}\, K^i_{jkl}=\partial_{[l}\Gamma^i_{|j|k]}+\Gamma^i_{p[l}\,\Gamma^p_{|j|k]}-\Gamma^{i\cdot p}_{j\,[l}\,\Gamma^s_{|p|k]}u_s\right),\end{array}\right.\\ \left|\begin{array}{l}\text{б) уравнение } D\Gamma^{i\cdot l\cdot l_1\cdot\,\cdots\, l_\beta}_{jk}=0 \text{ и все полученные из него последова-}\\ \text{тельным ковариантным дифференцированием по } x^s \text{ до порядка } \gamma\\ \text{под знаком } D.\end{array}\right.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Если при увеличении каждого из чисел α, β, γ на единицу число независимых уравнений в системе (2) $\rho<n^2+n$ не меняется, то пространство будет допускать группу движений G_r порядка $r=n^2+n-\rho$.

2. Существование групп движений G_r, $r>n^2$, $n\geqslant 2$. Если $\rho<nP$, то v^i_j можно разложить [3] следующим образом:

$$v^i_j=\omega^1_j\,\xi^i_1+\omega^2_j\,\xi^i_2+\cdots+\omega^P_j\,\xi^i_P, \tag{3}$$

где все ξ^i_a линейно-независимы ($a=1, 2, \ldots, P$).

К тому же еще можно потребовать [2]

$$\xi^i_a\,u_i=0 \quad (a=1,\ 2,\ \ldots,\ P). \tag{4}$$

Таким образом, уравнение $D\Gamma^{i\cdot j}_{kl}=0$ (точку $\cdot$, означающую дифференцирование, в дальнейшем будем пропускать), содержащееся в (2), в рассматриваемой точке, запишется:

$$\sum_{a=1}^{P}\omega^a_s\,\xi^i_a\,\Gamma^{sj}_{kl}+\sum_{a=1}^{P}\omega^a_s\,\xi^j_a\,\Gamma^{is}_{kl}=\sum_{a=1}^{P}\omega^a_k\,\xi^s_a\,\Gamma^{ij}_{sl}+\sum_{a=1}^{P}\omega^a_l\,\xi^s_a\,\Gamma^{ij}_{ks} \tag{5}$$

для

$$G_r,\ r>n^2+n-nP.$$

В данном случае ($r>n^2$) имеем $P=1$ и

$$v^i_j=\omega^1_j\,\xi^i_1\overset{\text{def}}{\equiv}\omega_j\,\xi^i.$$

Теперь уравнения (5) примут вид:

$$\omega_s\,\xi^i\,\Gamma^{sj}_{kl}+\omega_s\,\xi^j\,\Gamma^{is}_{kl}=\omega_k\,\xi^s\,\Gamma^{ij}_{sl}+\omega_l\,\xi^s\,\Gamma^{ij}_{ks}. \tag{6}$$

В рассматриваемой точке (x^i, u_k) пространства U_n выберем специальную систему координат, в которой

$$u_k=\delta^1_k. \tag{7}$$

Тогда (4) дают $\xi^1=0$. Если к этому еще положим

$$\xi^s=\delta^s_2, \tag{8}$$

то из (6), полагая $k=l$, получим:

$$\Gamma^{ij}_{2l}=0.$$

Аналогично найдем

$$\Gamma^{ij}_{al}=0 \quad (a\neq i,\ j,\ 1). \tag{9}$$

Рассмотрим преобразование координат $A^3_{1'}=t$, $A^{3'}_1=-t$, другие $A^{i'}_j=\delta^{i'}_j$, $A^i_{j'}=\delta^i_{j'}$. Оно сохраняет (7), а, следовательно и (9). Из равенства $\Gamma^{3'\,2'}_{3'\,1'}= -t^2\,\Gamma^{12}_{33}+t\,(\Gamma^{32}_{33}-\Gamma^{12}_{31})+\Gamma^{32}_{31}=0$, которое должно выполняться при любом t, получим $\Gamma^{32}_{33}=\Gamma^{12}_{31}=0$. Следовательно,

$$\Gamma^{ja}_{aa}=\Gamma^{aj}_{aa}=0 \quad (a\neq j,\ 1). \tag{10}$$

Аналогично преобразование $A^{3'}_2=-t$, $A^3_{2'}=t$, другие $A^{i'}_j=\delta^{i'}_j$, $A^i_{j'}=\delta^i_{j'}$, примененное к $\Gamma^{2'\,3'}_{2'\,2'}=0$, дает $\Gamma^{22}_{22}=\Gamma^{23}_{33}+\Gamma^{23}_{23}$. Учитывая (10), имеем $\Gamma^{22}_{22}=0$ и

$$\Gamma^{aa}_{aa}=0 \quad (a\neq 1). \tag{11}$$

Из однородности Γ^i_{jk} следует $\Gamma^{i;l}_{jk}\,u_l=0$. Откуда (7) дают $\Gamma^{i;1}_{jk}=0$.

Таким образом, в выбранной системе координат (7) отличными от нуля могут быть только компоненты вида

$$\Gamma^{ij}_{11} \quad (j\neq 1).$$

Аналогично, анализируя уравнения $D\Gamma^{ijp}_{kl}=0$, можно показать, что отличными от нуля могут быть только компоненты вида Γ^{ijp}_{11}.

Пусть одна из компонент Γ^{ij}_{11} отлична от нуля. Берем одну серию уравнений из условий интегрируемости (2):

$$D\Gamma^{ij}_{kl}=0,$$

или, в другом виде,

$$v^h_s\,T^s_h\binom{ij}{kl}+v^h\,\Gamma^{ij}_{kl,\,h}=0,$$

где

$$T^s_h\binom{ij}{kl}=-\delta^i_h\,\Gamma^{sj}_{kl}-\delta^j_h\,\Gamma^{is}_{kl}+\delta^s_k\,\Gamma^{ij}_{hl}+\delta^s_l\,\Gamma^{ij}_{kh}-\Gamma^{ijs}_{kl}\,u_h.$$

В рассматриваемой точке (x^i, u_k) пространства U_n выберем систему координат, в которой выполнено (7).

Пусть компонента $\Gamma^{sr}_{11}\neq 0$. Тогда матрица $T^s_h\binom{ij}{kl}$ имеет порядок не ниже n, $n\geqslant 2$. Для доказательства достаточно взять матрицу, составленную при функциях $v^r_1, v^r_2, v^r_3, \dots, v^1_n$ в уравнениях $\binom{sr}{11}, \binom{sr}{21}, \binom{sr}{31}, \dots, \binom{sr}{n1}$, если $s\neq 1$; а при $s=1$ — матрицу при функциях $v^r_r, v^1_2, v^1_3, \dots, v^1_n$ в уравнениях $\binom{rr}{11}, \binom{1r}{21}, \binom{1r}{31}, \dots, \binom{1r}{n1}$.

Из изложенного выше следует, что среди уравнений (2) не менее n независимых уравнений, и порядок групп движений G_r $r\leqslant n^2$.

Теорема. *Не существуют пространства U_n аффинной связности, допускающие группу движений G_r порядка $r>n^2$, $n\geqslant 2$.*

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
11.VI.1970

Литература

1. Б. Л. Лаптев, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов, Учен. записки Казанского университета, **118**, кн. 4, 1958, 76–147.
2. А. П. Урбонас, Максимально подвижные пространства гиперплоскостных элементов общей аффинной связности, Лит. матем. сб., **IX**, № 1 (1969), 153–179.
3. T. Okubo, On the order of the groups of affine collineations in the generalized spaces of path, I, II, III, Tensor 6, № 3, (1956), 141–158; № 1, (1957), 1–17, 18–33.

APIE JUDESIUS HIPERPLOKŠTUMINIŲ ELEMENTŲ ERDVĖJE

A. Urbonas

(*Reziumė*)

[2] buvo parodyta, kad hiperplokštuminių elementų erdvėse su bendru afininiu sąryšiu gali būti judesių grupė G_r su parametrų skaičiumi $r \leqslant n^2 - n - 2$, $n \geqslant 7$. Šiame straipsnyje nagrinėjami judesiai hiperplokštuminių elementų erdvėse su nupiautu ($C_k^{ij} = 0$) afininiu sąryšiu. Įrodyta, kad šiuo atveju judesių grupė turi ne daugiau kaip n^2 parametrų.

SUR LES MOUVEMENTS DANS L'ESPACE DES ÉLÉMENTS HYPERPLANS

A. Urbonas

(*Résumé*)

On a démontré [2], que l'espace des éléments hyperplans avec la connection afinne commune permet le groupe des mouvements G_r où $r \leqslant n^2 - n + 2$, $n \geqslant 7$. Dans cet article on analyse les mouvements quand la connection afinne est coupée. Nous avons demontré qu'en ce cas le groupe des mouvements ne peut contenir plus de n^2 de paramètres.