XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1971

УДК 513

СВЯЗНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПУНКТОРОВ

С. П. Жяукене

Введение

Б. Л. Лаптев ввел понятие пространства опорных элементов. Частным случаем таких пространств является пространство тензорных опорных элементов. Б. Л. Лаптев в этом пространстве построил операцию ковариантного дифференцирования и соответствующую ей аффинную связность, также теорию кривизны этой связности и соответствующую ей теорию инвариантов [6]. Кроме того, он построил операцию дифференцирования Ли в общем пространстве опорных элементов.

В. И. Близникас обнаружил, что в пространстве тензорных опорных элементов помимо аффинных связностей естественным образом возникают и другие, как линейные дифференциально-геометрические связности и тензорные связности [5]. Он ввел понятие инвариантного дифференциала и построил теорию соответствующих связностей во многих частных случаях опорных элементов, как центральных копункторов [1], линейных элементов и др. В. И. Близникас глубоко и в различных аспектах разработал теорию различных связностей в общем пространстве опорных элементов [2], [4], [5].

В работе [9] введена операция инвариантного дифференцирования в пространстве центральных пункторов W_n.

В этой заметке методом Г. Ф. Лаптева [7] рассматривается структура пространства центральных пункторов W_n, вводится линейная связность, горизонтальная центро-проективная связность, получаются инвариантные производные, тождества Риччи и Бианки.

§ 1. Структурные уравнения пространства центральных пункторов W_n

Каждой точке дифференцируемого многообразия V_n, локальные координаты которого $x^1, x^2, \ldots, x^n$ являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений $\omega^i=0\,(i, j, k, \ldots=1, 2, \ldots n)$, можно ассоциировать пространство значений дифференциально-геометрического объекта. Множество всех этих ассоциированных пространств Б. Л. Лаптев назвал пространством опорных элементов.

Частным случаем пространств опорных элементов является пространство центральных пункторов, локальные координаты которого x^i, u^i являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений [8]:

$$\begin{cases}\omega^i=0,\\ \Theta^i=0,\end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$\Theta^i = du^i + u^j \omega_j^i - \frac{1}{n+1} u^i u^j \omega_j \tag{1.2}$$

и

$$\omega_{ij}^i = \omega_j, \quad \omega_{ijk}^i = \omega_{jk}, \quad \omega_{ijkl}^i = \omega_{jkl}, \quad \ldots$$

Формы $\Theta^1, \Theta^2, \ldots, \Theta^n$ линейно независимые пфаффовые формы, и, вместе взятые с линейно независимыми формами $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ имеют следующую структуру:

$$\begin{cases} D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \\ D\Theta^i = \omega^j \wedge \Theta_j^i + \Theta^j \wedge \bar{\omega}_j^i, \end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$\bar{\omega}_j^i = \omega_j^i - \frac{2u^k}{n+1} \delta_{(j}^i \omega_{k)}, \tag{1.4}$$

$$\Theta_j^i = u^k \left(\omega_{kj}^i - \frac{1}{n+1} u^i \omega_{kj}\right). \tag{1.5}$$

Формы ω_j^i, Θ_j^i, $\bar{\omega}_j^i$, $\ldots$, полученные при последовательном продолжении системы (1.3), связаны следующими структурными уравнениями

$$\begin{cases} D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \\ D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \\ D\omega_{jk}^i = \omega_{jk}^l \wedge \omega_l^i + \omega_j^l \wedge \omega_{kl}^i + \omega_k^l \wedge \omega_{jl}^i + \omega^l \wedge \omega_{jkl}^i; \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{cases} D\Theta^i = \Theta^j \wedge \bar{\omega}_j^i + \omega^j \wedge \Theta_j^i, \\ D\bar{\omega}_j^i = \bar{\omega}_j^k \wedge \bar{\omega}_k^i + \omega^k \wedge \Theta_{jk}^i + \Theta^k \wedge \bar{\omega}_{jk}^i, \\ D\bar{\omega}_{jk}^i = \bar{\omega}_{jk}^l \wedge \bar{\omega}_l^i + \bar{\omega}_j^l \wedge \bar{\omega}_{kl}^i + \bar{\omega}_k^l \wedge \bar{\omega}_{jl}^i + \omega^l \wedge \Theta_{jkl}^i; \end{cases} \tag{1.7}$$

$$D\Theta_j^i = \omega_j^k \wedge \Theta_k^i + \Theta_j^k \wedge \bar{\omega}_k^i + \Theta^k \wedge \Theta_{kj}^i + \omega^k \wedge \Omega_{jk}^i; \tag{1.8}$$

$$D\Theta_{jk}^i = \omega_k^l \wedge \Theta_{jl}^i + \Theta_k^l \wedge \bar{\omega}_{jl}^i + \bar{\omega}_j^l \wedge \Theta_{lk}^i + \Theta_{jk}^l \wedge \bar{\omega}_l^i + \omega^l \wedge \Omega_{jkl}^i + \Theta^l \wedge \Theta_{ljk}^i; \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} D\Omega_{jk}^i = {} & \Theta_j^l \wedge \Omega_{lk}^i + \Theta_j^l \wedge \Theta_{lk}^i + \omega_k^l \wedge \Omega_{jl}^i + \Theta_k^l \wedge \Theta_{lj}^i + \\ & + \omega_{jk}^l \wedge \Theta_l^i + \Omega_{jk}^l \wedge \bar{\omega}_l^i + \omega^l \wedge \delta_{jkl}^i + \Theta^l \wedge \Omega_{ljk}^i; \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

где

$$\bar{\omega}_{jk}^i = -\frac{2}{n+1} \delta_{(j}^i \omega_{k)}, \tag{1.11}$$

$$\Theta_{jk}^i = \omega_{jk}^i - \frac{2u^l}{n+1} \delta_{(j}^i \omega_{l)k}, \tag{1.12}$$

$$\Omega_{jk}^i = u^l \left(\omega_{ljk}^i - \frac{1}{n+1} u^i \omega_{ljk}\right), \tag{1.13}$$

$$\Theta_{jkl}^i = -\frac{2}{n+1} \delta_{(j}^i \omega_{k)l}, \tag{1.14}$$

$$\Omega_{jkl}^i = \omega_{jkl}^i - \frac{2u^p}{n+1} \delta_{(p}^i \omega_{j)kl}, \tag{1.15}$$

$$\partial_{jkl}^i = u^p \left(\omega_{pjkl}^i - \frac{1}{n+1} u^i \omega_{pjkl}\right). \tag{1.16}$$

Из полученных структурных уравнений следует, что формы ω^i, Θ^i, ω_j^i, ω_{jk}^i, $\ldots$, $\bar{\omega}_j^i$, $\bar{\omega}_{jk}^i$ определяют расслоенные дифференциальные структуры, связанные с пространством W_n. Эти структуры имеют две подструктуры, т. е. горизонтальную расслоенную дифференциальную структуру, определенную формами ω^i, ω^i_j, ω^i_{jk}, ... и вертикальную расслоенную дифференциальную структуру, определенную формами ω^i, Θ^i, $\bar{\omega}^i_j$, $\bar{\omega}^i_{jk}$.

Формы $\bar{\omega}^i_j|_{\omega^i=\Theta^i=0}$ и $\bar{\omega}^i_{jk}|_{\omega^i=\Theta^i=0}$ имеют такую же структуру, как и формы $\omega^i_j|_{\omega^i=0}$ и $\omega^i_{jk}|_{\omega^i=0}$. Эти формы являются инвариантными формами дифференциальной группы второго порядка для слоя пространства центральных пункторов W_n, которую мы будем называть вертикальной дифференциальной группой второго порядка пространства центральных пункторов.

С каждым опорным элементом пространства W_n связываются два линейных пространства: касательное векторное пространство T_{2n}, изоморфное пространству операторов

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad U_i = \frac{\partial}{\partial u^i},$$

и касательное дуальное векторное пространство T^*_{2n} с натуральным корепером (dx^i, du^i), или произвольным — (ω^i, Θ^i). Группа преобразований элементов пространств T_{2n} и T^*_{2n} определяется инвариантными формами

$$\overset{\circ}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j|_{\omega^i=\Theta^i=0}, \quad \overset{\circ}{\bar{\omega}}{}^i_j = \bar{\omega}^i_j\,{}_{\omega^i=\Theta^i=0}, \quad \overset{\circ}{\Theta}{}^i_j = \Theta^i_j|_{\omega^i=\Theta^i=0},$$

структурные уравнения которых имеют вид

$$D\overset{\circ}{\omega}{}^i_j = \overset{\circ}{\omega}{}^k_j \wedge \overset{\circ}{\omega}{}^i_k, \quad D\overset{\circ}{\bar{\omega}}{}^i_j = \overset{\circ}{\bar{\omega}}{}^k_j \wedge \overset{\circ}{\bar{\omega}}{}^i_k, \quad D\overset{\circ}{\Theta}{}^i_j = \overset{\circ}{\omega}{}^k_j \wedge \overset{\circ}{\Theta}{}^i_k + \overset{\circ}{\Theta}{}^k_j \wedge \overset{\circ}{\bar{\omega}}{}^i_k. \tag{1.17}$$

Из этих структурных уравнений следует, что упомянутая группа имеет две подгруппы, определенные инвариантными формами $\overset{\circ}{\omega}{}^i_j$ и $\overset{\circ}{\bar{\omega}}{}^i_j$. Формы $\overset{\circ}{\omega}{}^i_j$ — инвариантные формы центроаффинной группы касательного пространства базы, а $\overset{\circ}{\bar{\omega}}{}^i_j$ — инвариантные формы такой же группы касательного пространства слоя. Подгруппу, определенную формами $\overset{\circ}{\omega}{}^i_j$, будем называть горизонтальной центроаффинной подгруппой, а вторую подгруппу — вертикальной подгруппой (она является вертикальной дифференциальной группой первого порядка).

Инфинитезимальные преобразования векторов репера $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{n+i}\}$ пространства T_{2n} имеют вид

$$\begin{aligned} d\,\mathbf{e}_i &= \overset{\circ}{\omega}{}^j_i \mathbf{e}_j + \overset{\circ}{\Theta}{}^j_i \mathbf{e}_{n+j}, \\ d\,\mathbf{e}_{n+i} &= \overset{\circ}{\bar{\omega}}{}^j_i \mathbf{e}_{n+j}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

а произвольного корепера $\{\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^{n+i}\}$ пространства T^*_{2n}

$$\begin{aligned} d\,\mathbf{e}^i &= -\overset{\circ}{\omega}{}^i_j \mathbf{e}^j, \\ d\,\mathbf{e}^{n+i} &= -\overset{\circ}{\Theta}{}^i_j \mathbf{e}^j - \overset{c}{\bar{\omega}}{}^i_j \mathbf{e}^{n+j}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Видно, что пространство T_{2n} имеет инвариантное подпространство, определенное векторами $\mathbf{e}_{n+i}$, а T^*_{2n} — n-мерное инвариантное подпространство, определенное базисными ковекторами $\mathbf{e}^i$.

§ 2. Линейные связности

Если в пространстве центральных пункторов W_n задано некоторое поле дифференциально-геометрического объекта, называемого фундаментальным [5], то при помощи этого поля можно развить геометрию как теорию инвариантов и инвариантных операций, присоединенных к фундаментальному объекту относительно допустимых преобразований координат. В качестве фундаментального объекта будем рассматривать объект линейной дифференциально-геометрической связности, объект горизонтальной центро-проективной связности и объекты других связностей.

Если T^*_{2n} касательное дуальное векторное пространство пространства W_n, подвижный корепер которого составлен из форм ω^i и Θ^i, то оснащение пространств T^*_{2n} можно определить при помощи форм [5]

$$\tilde{\Theta}^i = \Theta^i + \Gamma^i_k \omega^k, \tag{2.1}$$

причем величины Γ^i_k должны образовать дифференциально-геометрический объект следующей структуры:

$$d\Gamma^i_k - \Gamma^i_j \omega^j_k + \Gamma^j_k \bar{\omega}^i_j - \Theta^i_k = \Gamma^i_{j,k} \omega^j + {}'\Gamma^i_{j,k} \Theta^j. \tag{2.2}$$

Этот объект называется объектом линейной дифференциально-геометрической связности пространства центральных пункторов W_n.

Последовательное продолжение системы (2.2) дает:

$$\begin{aligned} & d\Gamma^i_{j,k} - \Gamma^i_{l,k} \omega^l_j - \Gamma^i_{j,l} \omega^l_k + \Gamma^l_{j,k} \bar{\omega}^i_l - \Gamma^i_l \omega^l_{kj} + \Gamma^l_k \Theta^i_{lj} - \\ & - \Omega^i_{jk} - {}'\Gamma^i_{l,k} \Theta^l_j = \Gamma^i_{lj,k} \omega^l + {}'\Gamma^i_{lj,k} \Theta^l, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} & d\,{}'\Gamma^i_{j,k} - {}'\Gamma^i_{l,k} \bar{\omega}^l_j - {}'\Gamma^i_{j,l} \omega^l_k + {}'\Gamma^l_{j,k} \bar{\omega}^i_l + \Gamma^l_k \bar{\omega}^i_{lj} - \Theta^i_{jk} = \\ & = {}'\Gamma^i_{lj,k} \omega^l + {}''\Gamma^i_{lj,k} \Theta^l, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} & d\Gamma^i_{pj,k} - \Gamma^i_{lj,k} \omega^l_p - \Gamma^l_{pl,k} \omega^l_j - \Gamma^i_{pj,l} \omega^l_k + \Gamma^l_{pj,k} \bar{\omega}^i_l - \Gamma^i_{i,k} \omega^l_{jp} - \\ & - \Gamma^i_{j,l} \omega^l_{kp} + \Gamma^l_{j,k} \Theta^i_{lp} - \Gamma^i_{p,l} \omega^l_{kj} + \Gamma^l_{p,k} \Theta^i_{lj} - {}'\Gamma^i_{l,k} \Omega^l_{jp} - \Gamma^i_l \omega^l_{kjp} + \\ & + \Gamma^l_k \Omega^i_{ljp} - {}'\Gamma^i_{pl,k} \Theta^l_j - {}'\Gamma^i_{jl,k} \Theta^l_p \equiv 0 \pmod{\omega^i, \Theta^i}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} & d\,{}'\Gamma^i_{pj,k} - {}'\Gamma^i_{lj,k} \omega^l_p - {}'\Gamma^i_{pl,k} \omega^l_j - {}'\Gamma^i_{pj,l} \omega^l_k + {}'\Gamma^l_{pj,k} \bar{\omega}^i_l - {}'\Gamma^i_{l,k} \Theta^l_{jp} - {}'\Gamma^i_{j,l} \omega^l_{kp} + \\ & + {}'\Gamma^l_{j,k} \Theta^i_{lp} + \Gamma^l_{p,k} \bar{\omega}^i_{lj} + \Gamma^l_k \Theta^i_{ljp} - \Omega^i_{jkp} - {}''\Gamma^i_{lj,k} \Theta^l_p \equiv 0 \pmod{\omega^i, \Theta^i}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} & d\,{}''\Gamma^i_{pj,k} - {}''\Gamma^i_{lj,k} \bar{\omega}^l_p - {}''\Gamma^i_{pl,k} \bar{\omega}^l_j - {}''\Gamma^i_{pj,l} \omega^l_k + {}''\Gamma^l_{pj,k} \bar{\omega}^i_l - {}'\Gamma^i_{l,k} \bar{\omega}^l_{jp} + \\ & + {}'\Gamma^l_{j,k} \bar{\omega}^i_{lp} + {}'\Gamma^l_{p,k} \bar{\omega}^i_{lj} - \Theta^i_{pjk} \equiv 0 \pmod{\omega^i, \Theta^i}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Дифференциальные уравнения (2.2) можно переписать в виде

$$d\Gamma^i_k - \Gamma^i_j \omega^j_k + \Gamma^j_k \bar{\omega}^i_j - \Theta^i_k = G^i_{j,k} \omega^j + {}'\Gamma^i_{j,k} \tilde{\Theta}^j, \tag{2.2}$$

где

$$G^i_{j,k} = \Gamma^i_{j,k} - {}'\Gamma^i_{l,k} \Gamma^l_j. \tag{2.8}$$

Дифференцируя внешним образом (2.1), получим:

$$D\tilde{\Theta}^i - \tilde{\Theta}^j \wedge (\bar{\omega}^i_j + {}'\Gamma^i_{j,k} \omega^k) = Z^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k, \tag{2.9}$$

где

$$Z^i_{jk} = 2G^i_{[j,k]}. \tag{2.10}$$

Эти величины образуют тензор, который называется тензором кривизны объекта связности Γ^i_j.

Из (2.9) следует, что преобразование форм Θ^i, определенных равенствами (2.1), индуцирует преобразование форм $\bar{\omega}^i_j$:

$$\overset{*}{\bar{\omega}}{}^i_j = \bar{\omega}^i_j + {}'\Gamma^i_{j,k} \omega^k. \tag{2.11}$$

Дифференцируя систему уравнений (2.11), получим:

$$D\overset{*}{\bar{\omega}}{}^i_j - \overset{*}{\bar{\omega}}{}^k_j \wedge \overset{*}{\bar{\omega}}{}^i_k = \frac{1}{2}\, Z^i_{jkl}\, \omega^k \wedge \omega^l + \tilde{\Theta}^k \wedge \overset{*}{\bar{\omega}}{}^i_{jk}, \tag{2.12}$$

где

$$\overset{*}{\bar{\omega}}{}^i_{jk} = \bar{\omega}^i_{jk} + {}''\Gamma^i_{jk,\,l}\, \omega^l, \tag{2.13}$$

и

$$Z^i_{jkl} = 2\,({}'\Gamma^i_{[k\,|\,j,\,|\,l]} - {}'\Gamma^p_{j,\,[k}\, {}'\Gamma^i_{|\,p,\,|\,l]} - {}''\Gamma^i_{pj,\,[l}\, \Gamma^p_{k]}). \tag{2.14}$$

Из системы дифференциальных уравнений (2.2), (2.4), (2.7) следует, что каждая из систем

$$\Gamma^i_k,\ {}'\Gamma^i_{j,\,k};$$

$$\Gamma^i_k,\ {}'\Gamma^i_{j,\,k},\ {}''\Gamma^i_{ij,\,k} \tag{2.15}$$

образует дифференциально-геометрический объект. Дифференциально-геометрический объект $(\Gamma^i_k,\ {}'\Gamma^i_{j,\,k},\ {}''\Gamma^i_{ij,\,k})$, согласно терминологии [5], называется объектом индуцированной линейной вертикальной связности второго порядка пространства W_n. Формы этой связности записаны уравнениями (2.1), (2.11), (2.13). $(Z^i_{jk},\ Z^i_{jkl})$ образует дифференциально-геометрический объект, который будем называть первым объектом кривизны линейной индуцированной вертикальной связности второго порядка.

Пользуясь уравнениями (2.7), найдем, что свернутый объект удовлетворяет следующим уравнениям:

$$d\,{}''\Gamma^i_{ij,\,k} - {}''\Gamma^i_{il,\,k}\, \bar{\omega}^l_j - {}''\Gamma^i_{ij,\,l}\, \omega^l_k + {}'\Gamma^l_{j,\,k}\, \bar{\omega}_l - \Theta_{jk} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i). \tag{2.16}$$

Объект $(\Gamma^i_k,\ {}'\Gamma^i_{j,\,k},\ {}''\Gamma^i_{ij,\,k})$ будет объектом усеченной вертикальной центро-проективной связности, но полученный при продолжении объекта линейной дифференциально-геометрической связности Γ^i_j. Можно и самостоятельно определить вертикальную центро-проективную связность и получить определяющий ее объект, т.е. полный объект вертикальной центро-проективной связности, и как его подобъект – объект усеченной центро-проективной связности.

Так как формы ω^i, Θ^i $\bar{\omega}^i_j$, $\bar{\omega}^i_{jk}$ определяют вертикальную расслоенную дифференциальную структуру, то и формы ω^i, Θ^i, $\bar{\omega}^i_j$, $\bar{\omega}_j$ (где $\bar{\omega}_k = \bar{\omega}^i_{ik}$) тоже определяют расслоенную дифференциальную структуру. Первые интегралы системы дифференциальных уравнений $\omega^i = 0$, $\Theta^i = 0$, $\bar{\omega}^i_j = 0$, $\bar{\omega}_j = 0$ определяют главное расслоенное пространство $P(W_n,\ P_v L_0)$, где база – пространство центральных пункторов W_n, а слои изоморфны вертикальной центро-проективной группе $P_v L_0$. Инвариантные формы этой группы $\overset{\circ}{\bar{\omega}}{}^i_j$, $\overset{\circ}{\bar{\omega}}_j$ удовлетворяют системе внешних дифференциальных уравнений

$$D\overset{\circ}{\bar{\omega}}{}^i_j = \overset{\circ}{\bar{\omega}}{}^k_j \wedge \overset{\circ}{\bar{\omega}}{}^i_k,$$

$$D\overset{\circ}{\bar{\omega}}_j = \overset{\circ}{\bar{\omega}}{}^k_j \wedge \overset{\circ}{\bar{\omega}}_k. \tag{2.17}$$

С каждой точкой пространства $P(W_n,\ P_v L_0)$ связываются два линейных пространства: касательное пространство T_N и дуальное касательное пространство T_N^*. Инфинитезимальные преобразования векторов репера $\{\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_{n+i}\,\mathbf{e}_j^i,\ \mathbf{e}^i\}$ пространства T_N имеют вид

$$\begin{aligned}
&\delta\,\mathbf{e}_i=\overset{\circ}{\omega}{}_i^k\,\mathbf{e}_k+\overset{\circ}{\Theta}{}_i^k\,\mathbf{e}_{n+k}+\overset{\circ}{\Theta}{}_{ij}^k\,\mathbf{e}_k^j+\overset{\circ}{\Theta}{}_{ik}^i\,\mathbf{e}^k,\\
&\delta\,\mathbf{e}_{n+i}=\overset{\circ}{\bar\omega}{}_i^k\,\mathbf{e}_{n+k}+\overset{\circ}{\bar\omega}{}_{ij}^k\,\mathbf{e}_k^j,\\
&\delta\,\mathbf{e}_j^i=\overset{\circ}{\bar\omega}{}^k_j\,\mathbf{e}_k^i-\overset{\circ}{\bar\omega}{}_k^i\,\mathbf{e}_j^k+\overset{\circ}{\bar\omega}_j\,\mathbf{e}^i,\\
&\delta\,\mathbf{e}^i=-\overset{\circ}{\bar\omega}{}_j^i\,\mathbf{e}^j,
\end{aligned}\tag{2.18}$$

а произвольного корепера $\{\mathbf{e}^i,\ \mathbf{e}^{n+i},\ \mathbf{e}_i^j,\ \mathbf{e}_i\}$ пространства T_N^* – вид:

$$\begin{aligned}
&\delta\,\mathbf{e}^i=-\overset{\circ}{\omega}{}_j^i\,\mathbf{e}^j,\\
&\delta\,\mathbf{e}^{n+i}=-\overset{\circ}{\Theta}{}_j^i\,\mathbf{e}^j-\overset{\circ}{\bar\omega}{}_j^i\,\mathbf{e}^{n+j},\\
&\delta\,\mathbf{e}_j^i=-\overset{\circ}{\Theta}{}_{jk}^i\,\mathbf{e}^k-\overset{\circ}{\bar\omega}{}_{jk}^i\,\mathbf{e}^{n+k}-\overset{\circ}{\bar\omega}{}_k^i\mathbf{e}_j^k+\overset{\circ}{\bar\omega}{}_j^k\,\mathbf{e}_k^i,\\
&\delta\,\mathbf{e}_j=-\overset{\circ}{\Theta}_{jk}\,\mathbf{e}^k+\overset{\circ}{\bar\omega}{}_j^k\,\mathbf{e}_k-\overset{\circ}{\bar\omega}_k\,\mathbf{e}_j^k.
\end{aligned}\tag{2.19}$$

(Все формы со знаком „о“ над ними значит взяты при $\omega^i=0,\ \Theta^i=0$). Если T_N^* касательное дуальное векторное пространство пространства $P(W_n,\ P_vL_0)$, подвижной корепер которого составлен из форм ω^i, Θ^i, $\bar\omega_j^i$, $\bar\omega_j$, то оснащение пространства T_N^* определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\bar{\bar\omega}{}_j^i=\bar\omega_j^i+\bar\Gamma_{jk}^i\,\omega^k+\bar C_{jk}^i\,\tilde\Theta^k,\\
&\bar{\bar\omega}_j=\bar\omega_j+\bar\Gamma_{jk}\,\omega^k+\bar C_{jk}\,\tilde\Theta^k,
\end{aligned}\tag{2.20}$$

причем

$$d\bar\Gamma_{jk}^i-\bar\Gamma_{jl}^i\,\omega_k^l-\bar\Gamma_{lk}^i\,\bar\omega_j^l+\bar\Gamma_{jk}^l\,\bar\omega_l^i+\Gamma_k^l\,\bar\omega_{jl}^i-\Theta_{jk}^i\equiv0\ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\Theta^i),\tag{2.21}$$

$$d\bar C_{jk}^i-\bar C_{jl}^i\,\bar\omega_k^l-\bar C_{lk}^i\,\bar\omega_j^l+\bar C_{jk}^l\,\bar\omega_l^i-\bar\omega_{jk}^i\equiv0\ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i),\tag{2.22}$$

$$d\bar\Gamma_{jk}-\bar\Gamma_{jl}\,\omega_k^l-\bar\Gamma_{lk}\,\bar\omega_j^l+\bar\Gamma_{jk}^l\,\bar\omega_l-\Theta_{jk}\equiv0\ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i),\tag{2.23}$$

$$d\bar C_{jk}-\bar C_{jl}\,\bar\omega_k^l-\bar C_{lk}\,\bar\omega_j^l+\bar C_{jk}^l\,\bar\omega_l\equiv0\ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i).\tag{2.24}$$

Объект $(\Gamma_j^i,\ \bar\Gamma_{jk}^i,\ \bar C_{jk}^i,\ \bar\Gamma_{jk},\ \bar C_{jk})$ будет полным объектом вертикальной центро-проективной связности, а его подобъект $(\Gamma_j^i,\ \bar\Gamma_{jk}^i,\ \bar\Gamma_{jk})$ – усеченным объектом вертикальной центро-проективной связности. Так как индуцированный объект линейной дифференциально-геометрической связности $(\Gamma_j^i,\ '\Gamma_{j,\,k}^i,\ ''\Gamma_{ij,\,k}^i)$ удовлетворяет такие же внешние дифференциальные уравнения, как и объект $(\Gamma_j^i,\ \bar\Gamma_{jk}^i,\ \bar\Gamma_{jk})$, то правильно его назвали объектом вертикальной усеченной центро-проективной связности.

§ 3. Горизонтальная центро-проективная связность

С пространством центральных пункторов W_n связывается горизонтальная расслоенная дифференциальная структура, определенная формами ω^i, Θ^i, ω_j^i, ω_j. Первые интегралы системы дифференциальных уравнений $\omega^i=0$, $\Theta^i=0$. $\omega_j^i=0$, $\omega_j=0$ являются локальными координатами точки главного расслоенного пространства $P(W_n,\ P_hL_0)$, где база – пространство центральных пункторов.

W_n, а слои изоморфны горизонтальной центро-проективной группе $P_h L_0$. Инвариантные формы этой группы $\mathring{\omega}_j^i$, $\mathring{\omega}_j$ удовлетворяют системе внешних дифференциальных уравнений:

$$D\mathring{\omega}_j^i = \mathring{\omega}_j^k \wedge \mathring{\omega}_k^i,$$
$$D\mathring{\omega}_j = \mathring{\omega}_j^k \wedge \mathring{\omega}_k. \tag{3.1}$$

С каждым элементом главного расслоенного пространства $P(W_n, P_h L_0)$ связываются два линейных пространства: касательное векторное пространство T_n и дуальное касательное векторное пространство T_N^*, где $N = 3n + n^2$. Инфинитезимальные преобразования векторов репера $\{\varepsilon_i, \varepsilon_{n+i}, \varepsilon_j^i, \varepsilon^i\}$ пространства T_N имеют вид:

$$\delta\varepsilon_i = \mathring{\omega}_i^k \varepsilon_k + \mathring{\Theta}_i^k \varepsilon_{n+k} + \mathring{\omega}_{ij}^k \varepsilon_k^j + \mathring{\omega}_{ij} \varepsilon^j,$$
$$\delta\varepsilon_{n+i} = \bar{\omega}_i^k \varepsilon_{n+k},$$
$$\delta\varepsilon_j^i = \mathring{\omega}_j^k \varepsilon_k^i - \mathring{\omega}_k^i \varepsilon_j^k + \mathring{\omega}_j \varepsilon^i,$$
$$\delta\varepsilon^i = -\mathring{\omega}_j^i \varepsilon^j, \tag{3.2}$$

а произвольного корепера $\{\varepsilon^i, \varepsilon^{n+i}, \varepsilon_j^i, \varepsilon_i\}$ пространства T_N^*:

$$\delta\varepsilon^i = -\mathring{\omega}_j^i \varepsilon^j,$$
$$\delta\varepsilon^{n+i} = -\mathring{\Theta}_j^i \varepsilon^j - \mathring{\bar{\omega}}_j^i \varepsilon^{n+j},$$
$$\delta\varepsilon_j^i = -\mathring{\omega}_{jk}^i \varepsilon^k - \mathring{\omega}_k^i \varepsilon_j^k + \mathring{\omega}_j^k \varepsilon_k^i,$$
$$\delta\varepsilon_i = -\mathring{\omega}_{ij} \varepsilon^j - \mathring{\omega}_j \varepsilon_i^j + \mathring{\omega}_i^j \varepsilon_j. \tag{3.3}$$

Если векторы дуального касательного пространства T_N^* представляют формы ω^i, Θ^i, ω_j^i, ω_j, то связность можно определить следующим образом:

$$\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i + \Gamma_{jk}^i \omega^k + C_{jk}^i \Theta^k,$$
$$\tilde{\omega}_j = \omega_j + \Gamma_{jk} \omega^k + C_{jk} \Theta^k. \tag{3.4}$$

Так как

$$D\tilde{\omega}_j^i - \tilde{\omega}_j^k \wedge \tilde{\omega}_k^i = [d\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{jl}^i \omega_k^l - \Gamma_{lk}^i \omega_j^l + \Gamma_{jk}^l \omega_l^i - \omega_{jk}^i - C_{jl}^i \Theta_k^l, \ \omega^k] +$$
$$+ [dC_{jk}^i - C_{jl}^i \bar{\omega}_k^l - C_{lk}^i \omega_j^l + C_{jk}^l \omega_l^i, \ \Theta^k] -$$
$$- \Gamma_{jl}^k \Gamma_{kp}^i \omega^l \wedge \omega^p - (\Gamma_{jl}^k C_{kp}^i - C_{jp}^k \Gamma_{kl}^i) \omega^l \wedge \Theta^p - C_{jl}^k C_{kp}^i \Theta^l \wedge \Theta^p, \tag{3.5}$$

$$D\tilde{\omega}_j - \tilde{\omega}_j^k \wedge \tilde{\omega}_k = [d\Gamma_{jk} - \Gamma_{jl} \omega_k^l - \Gamma_{lk} \omega_j^l + \Gamma_{jk}^l \omega_l - \omega_{jk} - C_{jl} \Theta_k^l, \ \omega^k] +$$
$$+ [dC_{jk} - C_{jl} \bar{\omega}_k^l - C_{lk} \omega_j^l + C_{jk}^l \omega_l, \ \Theta^k] -$$
$$- \Gamma_{jl}^k \Gamma_{kp} \omega^l \wedge \omega^p - (\Gamma_{jl}^k C_{kp} - C_{jp}^k \Gamma_{kl}) \omega^l \wedge \Theta^p - C_{jl}^k C_{kp} \Theta^l \wedge \Theta^p, \tag{3.6}$$

то дифференциальные уравнения поля дифференциально геометрических объектов, которые определяют связность (3.4), имеют вид:

$$d\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{jl}^i \omega_k^l - \Gamma_{lk}^i \omega_j^l + \Gamma_{jk}^l \omega_l^i - \omega_{jk}^i - C_{jl}^i \Theta_k^l = \Gamma_{l,jk}^i \omega^l + {}'\Gamma_{l,jk}^i \Theta^l, \tag{3.7}$$
$$dC_{jk}^i - C_{jl}^i \bar{\omega}_k^l - C_{lk}^i \omega_j^l + C_{jk}^l \omega_l^i = C_{l,jk}^i \omega^l + {}'C_{l,jk}^i \Theta^l, \tag{3.8}$$
$$d\Gamma_{jk} - \Gamma_{jl} \omega_k^l - \Gamma_{lk} \omega_j^l + \Gamma_{jk}^l \omega_l - \omega_{jk} - C_{jl} \Theta_k^l = \Gamma_{l,jk} \omega^l + {}'\Gamma_{l,jk} \Theta^l, \tag{3.9}$$
$$dC_{jk} - C_{jl} \bar{\omega}_k^l - C_{lk} \omega_j^l + C_{jk}^l \omega_l = C_{l,jk} \omega^l + {}'C_{l,jk} \Theta^l. \tag{3.10}$$

Связность, определенную уравнениями (3.4), будем называть горизонтальной центро-проективной связностью, а объект $(\Gamma^i_{jk},\ C^i_{jk},\ \Gamma_{jk},\ C_{jk})$ – полным объектом горизонтальной центро-проективной связности.

Продолжения системы дифференциальных уравнений (3.8) имеют вид:

$$dC^i_{l,\,jk}-C^i_{p,\,jk}\,\omega^p_l-C^i_{l,\,pk}\,\omega^p_j-C^i_{l,\,jp}\,\bar\omega^p_k+C^p_{l,\,jk}\,\omega^i_p-$$
$$-C^i_{jp}\,\Theta^p_{kl}-C^i_{pk}\,\omega^p_{jl}+C^p_{jk}\,\omega^i_{pl}-{}'C^i_{p,\,jk}\,\Theta^p_l\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i), \tag{3.11}$$
$$d\,'C^i_{l,\,jk}-{}'C^i_{p,\,jk}\,\bar\omega^p_l-{}'C^i_{l,\,pk}\,\omega^p_j-{}'C^i_{l,\,jp}\,\bar\omega^p_k+C^p_{l,\,jk}\,\omega^i_p-$$
$$-C^i_{jp}\,\bar\omega^p_{kl}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i). \tag{3.12}$$

Из (3.7) – (3.10) следует, что полный объект горизонтальной центро-проективной связности имеет следующие подобъекты: C^i_{jk} – проективно-релятивный тензор [9], $(C^i_{jk},\ C_{jk})$, $(\Gamma^i_{jk},\ C^i_{jk})$, $(\Gamma^i_{jk},\ \Gamma_{jk},\ C_{jk})$. Из компонент проективно-релятивного тензора C^i_{jk} и опорных пункторов u^j, u^k нетрудно построить величины

$$C^i=C^i_{jk}\,u^j u^k, \tag{3.13}$$

которые в пространстве W_n определяют векторное поле, причем

$$dC^i+C^j\,\omega^i_j=C^i_j\,\omega^j+{}'C^i_j\,\Theta^j, \tag{3.14}$$

где

$$C^i_j=C^i_{j,\,kl}\,u^k u^l, \tag{3.15}$$
$${}'C^i_j={}'C^i_{j,\,kl}\,u^k u^l+C^i_{kj}\,u^k+C^i_{jk}\,u^k. \tag{3.16}$$

Если на пространстве центральных пункторов W_n задано поле дифференциально-геометрического объекта $(A^i_j,\ B^i_j)$:

$$A^i_j=C^i_{j,\,kl}\,u^k u^l+C^k\,\Gamma^i_{kj}, \tag{3.17}$$
$$B^i_j={}'C^i_{j,\,kl}\,u^k u^l+C^i_{kj}\,u^k+C^i_{jk}\,u^k+C^k\,C^i_{kj} \tag{3.18}$$

со следующей структурой:

$$dA^i_j-A^i_k\,\omega^k_j+A^k_j\,\omega^i_k-B^i_k\,\Theta^k_j=A^i_{k,\,j}\,\omega^k+{}'A^i_{k,\,j}\,\Theta^k, \tag{3.19}$$
$$dB^i_j-B^i_k\,\bar\omega^k_j+B^k_j\,\omega^i_k=B^i_{k,\,j}\,\omega^k+{}'B^i_{k,\,j}\,\Theta^k, \tag{3.20}$$

то аналитическим образом можно найти такие тензорные формы

$$\psi^i=A^i_j\,\omega^j+B^i_j\,\Theta^j. \tag{3.21}$$

Если $\det\|B^i_j\|\neq 0$, то систему дифференциальных уравнений (3.21) можно разрешить относительно Θ^i:

$$\Theta^i=\tilde B^i_j\,\psi^j-\bar A^i_j\,\omega^j, \tag{3.22}$$

где

$$B^i_j\tilde B^j_k=\delta^i_k,\quad B^j_k\tilde B^i_j=\delta^i_k, \tag{3.23}$$

и

$$\bar A^i_j=\tilde B^i_k\,A^k_j. \tag{3.24}$$

Дифференцируя одну из систем (3.23), получим:

$$d\tilde B^i_j-\tilde B^i_k\,\omega^k_j+\tilde B^k_j\,\bar\omega^i_k=\tilde B^i_{k,\,j}\,\omega^k+{}'\tilde B^i_{k,\,j}\,\Theta^k, \tag{3.25}$$

а из (3.22) –

$$d\bar A^i_j-\bar A^i_k\,\omega^k_j+\bar A^k_j\,\bar\omega^i_k-\Theta^i_j=\bar A^i_{k,\,j}\,\omega^k+{}'\bar A^i_{k,\,j}\,\Theta^k, \tag{3.26}$$

Подставляя (3.22) в (3.4), получим:

$$\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i + \tilde{\Gamma}_{jk}^i \omega^k + \tilde{C}_{jk}^i \psi^k,$$

$$\tilde{\omega}_j = \omega_j + \tilde{\Gamma}_{jk} \omega^k + \tilde{C}_{jk} \psi^k, \tag{3.27}$$

где

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - C_{jl}^i \bar{A}_k^l, \tag{3.28}$$

$$\tilde{C}_{jk}^i = C_{jl}^i \tilde{B}_k^l, \tag{3.29}$$

$$\tilde{\Gamma}_{jk} = \Gamma_{jk} - C_{jl} \bar{A}_k^l, \tag{3.30}$$

$$\tilde{C}_{jk} = C_{jl} \tilde{B}_k^l. \tag{3.31}$$

Объект $(\tilde{\Gamma}_{jk}^i,\ \tilde{C}_{jk}^i,\ \tilde{\Gamma}_{jk},\ \tilde{C}_{jk})$, определенный дифференциальными уравнениями:

$$d\tilde{\Gamma}_{jk}^i - \tilde{\Gamma}_{jl}^i \omega_k^l - \tilde{\Gamma}_{lk}^i \omega_j^l + \tilde{\Gamma}_{jk}^l \omega_l^i - \omega_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{l,jk}^i \omega^l + '\tilde{\Gamma}_{l,jk}^i \Theta^l, \tag{3.32}$$

$$d\tilde{C}_{jk}^i - \tilde{C}_{jl}^i \omega_k^l - \tilde{C}_{lk}^i \omega_j^l + \tilde{C}_{jk}^l \omega_l^i = \tilde{C}_{l,jk}^i \omega^l + '\tilde{C}_{l,jk}^i \Theta^l, \tag{3.33}$$

$$d\tilde{\Gamma}_{jk} - \tilde{\Gamma}_{jl} \omega_k^l - \tilde{\Gamma}_{lk} \omega_j^l + \tilde{\Gamma}_{jk}^l \omega_l - \omega_{jk} = \tilde{\Gamma}_{l,jk} \omega^l + '\tilde{\Gamma}_{l,jk} \Theta^l, \tag{3.34}$$

$$d\tilde{C}_{jk} - \tilde{C}_{jl} \omega_k^l - \tilde{C}_{lk} \omega_j^l + \tilde{C}_{jk}^l \omega_l = \tilde{C}_{l,jk} \omega^l + '\tilde{C}_{l,jk} \Theta^l, \tag{3.35}$$

имеет следующие подобъекты:

$(\tilde{\Gamma}_{jk}^i,\ \tilde{\Gamma}_{jk})$ – объект центро-проективной связности,

$(\tilde{\Gamma}_{jk}^i)$ – объект аффинной связности,

$(\tilde{C}_{jk}^i)$ – тензор,

$(\tilde{\Gamma}_{jk}^i,\ \tilde{C}_{jk}^i)$, $(\tilde{C}_{jk}^i,\ \tilde{C}_{jk})$ – тоже самостоятельные объекты.

Связность, определенную уравнениями (3.22), (3.27), будем называть двойной связностью. Формы ω^i, ψ^i, ω_j^i связаны следующими уравнениями:

$$D\omega^i - \omega^j \wedge \tilde{\omega}_j^i = R_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k - \tilde{C}_{jk}^i \omega^j \wedge \psi^k, \tag{3.36}$$

$$D\psi^i - \psi^j \wedge \tilde{\omega}_j^i = \frac{1}{2} K_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k + P_{jk}^i \omega^j \wedge \psi^k + \frac{1}{2} S_{jk}^i \psi^j \wedge \psi^k, \tag{3.37}$$

$$D\tilde{\omega}_j^i - \tilde{\omega}_j^k \wedge \tilde{\omega}_k^i = \frac{1}{2} K_{jlp}^i \omega^l \wedge \omega^p + P_{jlp}^i \omega^l \wedge \psi^p + \frac{1}{2} S_{jlp}^i \psi^l \wedge \psi^p, \tag{3.38}$$

гд

$$R_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{[kj]}^i, \tag{3.39}$$

$$K_{jk}^i = B_l^i \bar{A}_{[j,k]}^l - B_l^i{}' \bar{A}_{p,[k}^l \bar{A}_{j]}^p, \tag{3.40}$$

$$P_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{kj}^i - B_l^i \tilde{B}_{j,k}^l + B_l^i{}' \tilde{B}_{p,k}^l \bar{A}_j^p - B_l^i{}' \bar{A}_{p,j}^l \tilde{B}_k^p, \tag{3.41}$$

$$S_{jk}^i = \tilde{C}_{[kj]}^i + B_l^i{}' \tilde{B}_{p,[j}^l \tilde{B}_{k]}^p, \tag{3.42}$$

$$K_{jlp}^i = \tilde{\Gamma}_{[l|,j|p]}^i - '\tilde{\Gamma}_{k,j[p}^i \bar{A}_{l]}^k + \tilde{\Gamma}_{j[p}^k \tilde{\Gamma}_{|k|l]}^i + \tilde{C}_{jk}^i K_{lp}^k, \tag{3.43}$$

$$P_{jlp}^i = \tilde{C}_{l,jp}^i - '\tilde{C}_{k,jp}^i \bar{A}_l^k + \tilde{C}_{jp}^k \tilde{\Gamma}_{kl}^i - \tilde{C}_{kp}^i \tilde{\Gamma}_{jl}^k -$$

$$- \tilde{C}_{jk}^i \tilde{\Gamma}_{pl}^k - '\tilde{\Gamma}_{k,jl}^i \tilde{B}_p^k + \tilde{C}_{jk}^i P_{lp}^k, \tag{3.44}$$

$$S_{jlp}^i = '\tilde{C}_{k,j[p}^i \tilde{B}_{l]}^k + \tilde{C}_{jk}^l \tilde{C}_{[lp]}^k - \tilde{C}_{j[l}^k \tilde{C}_{|k|p]}^i + \tilde{C}_{jk}^i S_{lp}^k. \tag{3.45}$$

Дифференцируя (3.25), (3.26), получим:

$$d\tilde{B}^i_{j,k}-\tilde{B}^i_{l,k}\,\omega^l_j-\tilde{B}^i_{j,l}\,\omega^l_k+\tilde{B}^l_{j,k}\,\bar{\omega}^i_l-\tilde{B}^i_l\,\omega^l_{jk}+\tilde{B}^l_k\,\Theta^i_{lj}-'\tilde{B}^i_{l,k}\,\Theta^l_j\equiv$$
$$\equiv 0(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i), \tag{3.46}$$

$$d'\tilde{B}^i_{j,k}-'\tilde{B}^i_{l,k}\,\bar{\omega}^l_j-'\tilde{B}^i_{j,l}\,\omega^l_k+'\tilde{B}^l_{j,k}\,\bar{\omega}^i_l+\tilde{B}^l_k\,\bar{\omega}^i_{lj}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i), \tag{3.47}$$

$$d\bar{A}^i_{j,k}-\bar{A}^i_{l,k}\,\omega^l_j-\bar{A}^i_{j,l}\,\omega^l_k+\bar{A}^l_{j,k}\,\bar{\omega}^i_l-\Omega^i_{kj}-\bar{A}^i_l\,\omega^l_{kj}+$$
$$+\bar{A}^l_k\,\Theta^i_{lj}-'\bar{A}^i_{l,k}\,\Theta^l_j\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i), \tag{3.48}$$

$$d'\bar{A}^i_{j,k}-'\bar{A}^i_{l,k}\,\bar{\omega}^l_j-'\bar{A}^i_{j,l}\,\omega^l_k+'\bar{A}^l_{j,k}\,\bar{\omega}^i_l-\Theta^i_{jk}+\bar{A}^l_k\,\bar{\omega}^i_{lj}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\Theta^i), \tag{3.49}$$

а (3.22), (3.23) –

$$d\tilde{\Gamma}^i_{l,jk}-\tilde{\Gamma}^i_{p,jk}\,\omega^p_l-\tilde{\Gamma}^i_{l,pk}\,\omega^p_j-\tilde{\Gamma}^i_{l,jp}\,\omega^p_k+\tilde{\Gamma}^p_{l,jk}\,\omega^i_p-$$
$$-\tilde{\Gamma}^i_{pk}\,\omega^p_{jl}-\tilde{\Gamma}^i_{jp}\,\omega^p_{kl}+\tilde{\Gamma}^p_{jk}\,\omega^i_{pl}-\omega^i_{jkl}-'\tilde{\Gamma}^i_{p,jk}\,\Theta^p_l\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i) \tag{3.50}$$

$$d'\tilde{\Gamma}^i_{l,jk}-'\tilde{\Gamma}^i_{p,jk}\bar{\omega}^p_l-'\tilde{\Gamma}^i_{l,pk}\,\omega^p_j-'\tilde{\Gamma}^i_{l,jp}\,\omega^p_k+'\tilde{\Gamma}^p_{l,jk}\,\omega^i_p\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i), \tag{3.51}$$

$$d\tilde{C}^i_{l,jk}-\tilde{C}^i_{p,jk}\,\omega^p_l-\tilde{C}^i_{l,pk}\,\omega^p_j-\tilde{C}^i_{l,jp}\,\omega^p_k+\tilde{C}^p_{l,jk}\,\omega^i_p-\tilde{C}^i_{pk}\,\omega^p_{jl}-$$
$$-\tilde{C}^i_{jp}\,\omega^p_{kl}+\tilde{C}^p_{jk}\,\omega^i_{pl}-'\tilde{C}^i_{p,jk}\,\Theta^p_l\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i), \tag{3.52}$$

$$d'\tilde{C}^i_{l,jk}-'\tilde{C}^i_{p,jk}\,\bar{\omega}^p_l-'\tilde{C}^i_{l,pk}\,\omega^p_j-'\tilde{C}^i_{l,jp}\,\omega^p_k+'\tilde{C}^p_{l,jk}\,\omega^i_p\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\Theta^i). \tag{3.53}$$

Пользуясь (3.20), (3.25), (3.26), (3.32) – (3.34) и (3.46) – (3.53), нетрудно проверить, что объекты кручения R^i_{jk}, $\tilde{C}^i_{jk}$ являются тензорами, K^i_{jlp}, P^i_{jlp}, S^i_{jlp} – первым, вторым и третьим картановыми тензорами кривизны и K^i_{jk}, P^i_{jk}, S^i_{jk} – первым, вторым и третьим картановыми тензорами дополнительной кривизны.

§ 4. Инвариантные производные и тождества Риччи

Пусть дано пункторное поле $T^i(x,\ u)$ на пространстве центральных пункторов W_n:

$$dT^i+T^j\,\omega^i_j-\frac{1}{n+1}\,T^i\,T^j\,\omega_j=T^i_j\,\omega^j+'T^i_j\,\Theta^j. \tag{4.1}$$

При продолжении системы (4.1) получим:

$$dT^i_j-T^i_k\,\omega^k_j+T^k_j\,\bar{\omega}^i_k+\Theta^i_j-'T^i_l\,\Theta^l_j\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i), \tag{4.2}$$

$$d'T^i_j-'T^i_k\,\bar{\omega}^k_j+'T^k_j\,\bar{\omega}^i_k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \Theta^i). \tag{4.3}$$

Заменим формы ω^i_j, ω_j, Θ^j в системе уравнений (4.1) формами двойной связности $\tilde{\omega}^i_j$, $\tilde{\omega}_j$, ψ^j по (3.22), (3.27), и получим:

$$\delta T^i\equiv dT^i+T^j\,\tilde{\omega}^i_j-\frac{1}{n+1}\,T^i\,T^j\,\tilde{\omega}_j=\nabla_j T^i\cdot\omega^j+\nabla^*_j\,T^i\cdot\psi^j, \tag{4.4}$$

где

$$\nabla_j\,T^i=T^i_j-'T^i_k\,\bar{A}^k_j+T^k\,\tilde{\Gamma}^i_{kj}-\frac{1}{n+1}\,T^i\,T^k\,\tilde{\Gamma}_{kj}, \tag{4.5}$$

$$\nabla^*_j\,T^i='T^i_k\tilde{B}^k_j+T^k\,\tilde{C}^i_{kj}-\frac{1}{n+1}\,T^i\,T^k\,\tilde{C}_{kj}. \tag{4.6}$$

Величины $\nabla_j T^i$, $\nabla_j^* T^i$ будем называть неголономными инвариантными производными пунктора, соответственно, первого и второго рода. Нетрудно проверить, используя уравнения (3.25), (3.26), (3.32) – (3.35) и (4.2), (4.3), что $\nabla_j T^i$ и $\nabla_j^* T^i$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$d(\nabla_j T^i) - \nabla_l T^i \omega_j^l + \nabla_j T^l \tilde{\omega}_l^i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \omega^i, \Theta^i), \tag{4.7}$$

$$d(\nabla_j^* T^i) - \nabla_l^* T^i \omega_j^l + \nabla_j^* T^l \omega_l^i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \omega^i, \Theta^i). \tag{4.8}$$

Так как $(\tilde{\Gamma}_{jk}^i, \tilde{C}_{jk}^i)$ является подобъектом объекта $(\tilde{\Gamma}_{jk}^i, \tilde{C}_{jk}^i, \tilde{\Gamma}_{jk}, \tilde{C}_{jk})$, то имея упомянутый объект, при помощи которого определяем инвариантный дифференциал пункторного поля, всегда имеем и его подобъект, при помощи которого определяем инвариантный дифференциал векторного поля

$$\delta\xi^i \equiv d\xi^i + \xi^j \cdot \tilde{\omega}_j^i = \nabla_j \xi^i \omega^j + \nabla_j^* \xi^i \psi^j. \tag{4.9}$$

Инвариантными производными векторного поля $\xi^i(x, u)$ первого и второго рода будут величины:

$$\nabla_j \xi^i = \xi_j^i - {}'\xi_k^i \bar{A}_j^k + \xi^k \Gamma_{kj}^i, \tag{4.10}$$

$$\nabla_j^* \xi^i = {}'\xi_k^i \tilde{B}_j^k + \xi^k \tilde{C}_{kj}^i. \tag{4.11}$$

Продолжив систему дифференциальных уравнений (4.9), получим:

$$d\xi_j^i - \xi_k^i \omega_j^k + \xi_j^k \omega_k^i + \xi^k \omega_{kj}^i - {}'\xi_k^i \Theta_j^k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \omega^i, \Theta^i), \tag{4.12}$$

$$d\,{}'\xi_j^i - {}'\xi_k^i \omega_j^k + {}'\xi_j^k \cdot \omega_k^i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \omega^i, \Theta^i). \tag{4.13}$$

Инвариантные производные можно таким же образом записать не только для одноиндексного тензора (вектора), но и для тензоров с любым числом индексов. Используя это, уравнение (3.44) можно записать в виде:

$$P_{\cdot lp}^i = \nabla_l \tilde{C}_{jp}^i - {}'\tilde{\Gamma}_{k,jl}^i \tilde{B}_p^k + \tilde{C}_{jk}^i P_{lp}^k. \tag{3.44}$$

Будем говорить, что пунктор вдоль кривой на W_n переносится параллельно с помощью двойной связности, если вдоль этой кривой равны нулю его первая и вторая инвариантные производные. Вектор ξ^i вдоль кривой на W_n переносится параллельно с помощью аффинной связности, если вдоль этой кривой равны нулю первая и вторая инвариантные производные вектора.

Чтобы получить тождества Риччи для векторного поля, дифференцируем равенства (4.10), (4.11):

$$d(\nabla_j \xi^i) - \nabla_k \xi^i \cdot \omega_j^k + \nabla_j \xi^k \cdot \omega_k^i = (\nabla_j \xi^i)_l \omega^l + {}'(\nabla_j \xi^i)_l \Theta^l, \tag{4.14}$$

$$d(\nabla_j^* \xi^i) - \nabla_k^* \xi^i \cdot \omega_j^k + \nabla_j^* \xi^k \omega_k^i = (\nabla_j^* \xi^i)_l \omega^l + {}'(\nabla_j^* \xi^i)_l \Theta^l. \tag{4.15}$$

Если в уравнениях (4.14), (4.15) формы ω_j^i, Θ^j заменить формами $\tilde{\omega}_j^i$ и ψ^j, то получим:

$$d(\nabla_j \xi^i) - \nabla_k \xi^i \cdot \tilde{\omega}_j^k + \nabla_j \xi^k \cdot \tilde{\omega}_k^i = \nabla_l \nabla_j \xi^i \omega^l + \nabla_l^* \nabla_j \xi^i, \psi^l, \tag{4.16}$$

$$d(\nabla_j^* \xi^i) - \nabla_k^* \xi^i \cdot \tilde{\omega}_j^k + \nabla_j^* \xi^k \cdot \tilde{\omega}_k^i = \nabla_l \nabla_j^* \xi^i \omega^l + \nabla_l^* \nabla_j^* \xi^i \cdot \psi^l, \tag{4.17}$$

где $\nabla_l \nabla_j \xi^i$, $\nabla_l^* \nabla_j \xi^i$, $\nabla_l \nabla_j^* \xi^i$, $\nabla_l^* \nabla_j^* \xi^i$ – вторые неголономные инвариантные производные векторного поля $\xi^i(x, u)$.

Продолжение системы дифференциальных уравнений

$$d\xi^i + \xi^j \omega_j^i = \nabla_j \xi^i \cdot \omega^j + \nabla_j^* \xi^i \cdot \psi^j,$$

при использовании (3.36) – (3.38), приводит к уравнениям:

$$d(\nabla_j \xi^i) - \nabla_k \xi^i \cdot \tilde{\omega}_j^k + \nabla_j \xi^k \cdot \tilde{\omega}_k^i = U_{jl}^i \omega^l + {}'U_{jl}^i \psi^l, \tag{4.18}$$

$$d(\nabla_j^* \xi^i) - \nabla_k^* \xi^i \cdot \tilde{\omega}_j^k + \nabla_j^* \xi^k \cdot \tilde{\omega}_k^i = V_{jl}^i \omega^l + {}'V_{jl}^i \psi^l, \tag{4.19}$$

где

$$U_{[jl]}^i = \frac{1}{2} \xi^k K_{klj}^i - \nabla_k \xi^i \cdot R_{lj}^k - \frac{1}{2} \nabla_k^* \xi^i \cdot K_{lj}^k, \tag{4.20}$$

$${}'V_{[jl]}^i = \frac{1}{2} \xi^k S_{klj}^i - \frac{1}{2} \nabla_k^* \xi^i \cdot S_{lj}^k, \tag{4.21}$$

$$V_{jl}^i - {}'U_{jl}^i = \xi^k \cdot P_{klj}^i + \nabla_k \xi^i \cdot \tilde{C}_{lj}^k - \nabla_k^* \xi^i \cdot P_{lj}^k. \tag{4.22}$$

Так как левые части уравнений (4.16), (4.17) и (4.18), (4.19) одинаковые, то

$$U_{jl}^i = \nabla_l \nabla_j \xi^i, \quad {}'V_{jl}^i = \nabla_l^* \nabla_j^* \xi^i, \quad {}'U_{jl}^i = \nabla_l^* \nabla_j \xi^i, \quad V_{jl}^i = \nabla_l \nabla_j^* \xi^i,$$

и соотношения (4.20) – (4.22) являются обобщенными тождествами Риччи для вторых инвариантных неголономных производных вектора ξ^i. Эти тождества имеют вид:

1) первая группа

$$2\nabla_{[l} \nabla_{j]} \xi^i = \xi^k \cdot K_{klj}^i - 2\nabla_k \xi^i \cdot R_{lj}^k - \nabla_k^* \xi^i \cdot K_{lj}^k; \tag{4.23}$$

2) вторая группа

$$2\nabla_{[l}^* \nabla_{j]}^* \xi^i = \xi^k \cdot S_{klj}^i - \nabla_k^* \xi^i \cdot S_{lj}^k; \tag{4.24}$$

3) третья группа

$$\nabla_l \nabla_j^* \xi^i - \nabla_l^* \nabla_j \xi^i = \xi^k \cdot P_{klj}^i + \nabla_k \xi^i \cdot \tilde{C}_{lj}^k - \Delta_k^* \xi^i \cdot P_{lj}^k. \tag{4.25}$$

Уравнения (4.23) – (4.25) можно переписать в другом виде, подставляя в них значение второй инвариантной производной из (4.12)

$$2\nabla_{[l} \nabla_{j]} \xi^i = \xi^k \cdot R_{klj}^i - 2\nabla_k \xi^i \cdot R_{lj}^k - {}'\xi_k^i \cdot \mathring{R}_{lj}^k, \tag{4.26}$$

$$2\nabla_{[l}^* \nabla_{j]}^* \xi^i = \xi^k \cdot \sigma_{klj}^i - {}'\xi_k^i \cdot \sigma_{lj}^k, \tag{4.27}$$

$$\nabla_l \nabla_j^* \xi^i - \nabla_l^* \nabla_j \xi^i = \xi^k \cdot Q_{klj}^i + \nabla_k \xi^i \, \tilde{C}_{lj}^k - {}'\xi_k^i \cdot Q_{lj}^k, \tag{4.28}$$

где

$$R_{klj}^i = K_{klj}^i - \tilde{C}_{kp}^i K_{lj}^p, \tag{4.29}$$

$$\sigma_{klj}^i = S_{klj}^i - \tilde{C}_{kp}^i S_{lj}^p, \tag{4.30}$$

$$Q_{klj}^i = P_{klj}^i - \tilde{C}_{kp}^i P_{lj}^p, \tag{4.31}$$

$$\mathring{R}_{lj}^k = \tilde{B}_p^k K_{lj}^p, \tag{4.32}$$

$$\sigma_{lj}^k = \tilde{B}_p^k S_{lj}^p, \tag{4.33}$$

$$Q_{lj}^k = \tilde{B}_p^k P_{lj}^p. \tag{4.34}$$

R_{klj}^i, σ_{klj}^i, Q_{klj}^i – тензоры, а $\mathring{R}_{lj}^k$, σ_{lj}^k, Q_{lj}^k – проективно-релятивные тензоры.

§ 5. Тождества Бианки

Тождества, которые являются аналогами тождеств Бианки, мы получим, дифференцируя внешним образом уравнения (3.36) – (3.38). Они имеют вид:

$$D\Omega^i + \Omega^j \wedge \tilde{\omega}^i_j - \omega^j \wedge \Omega^i_j = 0, \tag{5.1}$$

$$D\Lambda^i + \Lambda^j \wedge \tilde{\omega}^i_j - \psi^j \wedge \Omega^i_j = 0, \tag{5.2}$$

$$D\Omega^i_j + \Omega^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k - \tilde{\omega}^k_j \wedge \Omega^i_k = 0, \tag{5.3}$$

где

$$\Omega^i = R^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k - \tilde{C}^i_{jk}\, \omega^j \wedge \psi^k, \tag{5.4}$$

$$\Lambda^i = \frac{1}{2}\, K^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k + P^i_{jk}\, \omega^j \wedge \psi^k + \frac{1}{2}\, S^i_{jk}\, \psi^j \wedge \psi^k, \tag{5.5}$$

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\, K^i_{jlp}\, \omega^l \wedge \omega^p + P^i_{jlp}\, \omega^l \wedge \psi^p + \frac{1}{2}\, S^i_{jlp}\, \psi^l \wedge \psi^p. \tag{5.6}$$

Подставляя в (5.1) выражения форм Ω^i из (5.4), Ω^i_j из (5.6) и $\tilde{\omega}^i_j$ из (3.27), выполнив вычисления и разложив полученный результат по независимым внешним кубическим формам $\omega^j \wedge \omega^l \wedge \omega^p$, $\omega^j \wedge \omega^l \wedge \psi^p$, $\omega^j \wedge \psi^l \wedge \psi^p$ и приравнивая нулю коэффициенты при этих формах, получим следующие соотношения:

$$\nabla_{[j} R^i_{lp]} + 2R^i_{k\,[p} R^k_{jl]} - \frac{1}{2}\, K^i_{[jlp]} + \frac{1}{2}\, \tilde{C}^i_{[j\,|\,k\,|} K^k_{lp]} = 0, \tag{5.7}$$

$$\nabla^*_p R^i_{jl} - \nabla_{[j} \tilde{C}^i_{l]\,p} + 2R^i_{[\,j\,|\,k\,|} \tilde{C}^k_{l]\,p} - \tilde{C}^i_{kp} R^k_{jl} - P^i_{[jl]\,p} + \tilde{C}^i_{[j\,|\,k\,|} P^k_{l]\,p} = 0, \tag{5.8}$$

$$\nabla^*_{[l} \tilde{C}^i_{|\,j\,|\,p]} + \tilde{C}^i_{k\,[p} \tilde{C}^k_{|\,j\,|\,l]} - \frac{1}{2}\, S^i_{jlp} + \frac{1}{2}\, \tilde{C}^i_{jk} S^k_{lp} = 0. \tag{5.9}$$

Подставляя в тождество (5.7) вместо K^i_{jlp} его выражение через R^i_{jlp}, получим:

$$R^i_{[jlp]} + 2\,(\nabla_{[j} R^i_{lp]} + 2R^i_{k\,[p} R^k_{jl]}) = 0. \tag{5.10}$$

Если R^i_{jk}, то тождество (5.10) получит вид:

$$R^i_{[jlp]} = 0. \tag{5.11}$$

Выполнив аналогичные вычисления из (5.2), получим:

$$\frac{1}{2}\, \nabla_{[j} K^i_{lp]} + K^i_{k\,[j} R^k_{lp]} - \frac{1}{2}\, P^i_{[j\,|\,k\,|} K^k_{lp]} = 0, \tag{5.12}$$

$$\frac{1}{2}\, \nabla^*_p K^i_{jl} + \nabla_{[j} P^i_{l]\,p} + K^i_{[j\,|\,k\,|} \tilde{C}^k_{l]\,p} + P^i_{kp} R^k_{jl} - P^i_{[j\,|\,k\,|} P^k_{l]\,p} +$$

$$+ \frac{1}{2}\, S^i_{kp} K^k_{jl} - \frac{1}{2}\, K^i_{pjl} = 0, \tag{5.13}$$

$$\nabla^*_{[p} P^i_{|\,j\,|\,l]} + \frac{1}{2}\, \nabla_j S^i_{lp} + S^i_{[l\,|\,k\,|} P^k_{j]\,p} - \frac{1}{2}\, P^i_{jk} S^k_{lp} +$$

$$+ P^i_{[l\,|\,j\,|\,p]} - P^i_{k\,[p} \tilde{C}^k_{|\,j\,|\,l]} = 0, \tag{5.14}$$

$$\nabla_{[j} S^i_{lp]} - \frac{1}{2}\, S^i_{[jlp]} + \frac{1}{2}\, S^i_{[j\,|\,k\,|} S^k_{pl]} = 0. \tag{5.15}$$

Из (5.3) следуют тождества:

$$\frac{1}{2}\ \nabla_{[l}\, K^{i}_{\cdot\, j\,|\,ks]} + K^{i}_{j\,[l\,|\,p\,|}\, P^{p}_{sk]} - \frac{1}{2}\ P^{i}_{j\,[l\,|\,p\,|}\, K^{p}_{ks]} = 0, \tag{5.16}$$

$$\frac{1}{2}\ \nabla^{*}_{s}\, K^{i}_{jlp} + \nabla_{[l}\, P^{i}_{\cdot\, j\,|\,k]\,s} + K^{i}_{j\,[l\,|\,p\,|}\, \tilde{C}^{p}_{k]\,s} + P^{i}_{jps}\, R^{p}_{lk} -$$

$$- P^{i}_{j\,[l\,|\,p\,|}\, P^{p}_{k]\,s} + \frac{1}{2}\ S^{i}_{jps}\, K^{p}_{lk} = 0, \tag{5.17}$$

$$\nabla^{*}_{[s}\, P^{i}_{\cdot\, jl\,|\,k]} + \frac{1}{2}\ \nabla_{l}\, S^{i}_{jks} - P^{i}_{jp\,[s}\, \tilde{C}^{p}_{\cdot\, l\,|\,k]} + \frac{1}{2}\ P^{i}_{jlp}\, S^{p}_{sk} + S^{i}_{jp\,[s}\, P^{p}_{\cdot\, l\,|\,k]} = 0, \tag{5.18}$$

$$\frac{1}{2}\ \nabla^{*}_{[l}\, S^{i}_{\cdot\, j\,|\,ks]} + \frac{1}{2}\ S^{i}_{j\,[l\,|\,p\,|}\, S^{p}_{sk]} = 0. \tag{5.19}$$

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В. И. Близникасу за помощь при выполнении этой работы.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
23.XII.1970

Литература

1. В. И. Близникас, Полный объект центро-проективной связности и объект кручения-кривизны пространства центральных копункторов, Лит. матем. сб., IV, 4 (1964), 457–475.
2. В. И. Близникас, К теории кривизны пространства опорных элементов, Лит. матем. сб., V, 1 (1965), 9–24.
3. В. И. Близникас, Симметрические пространства центральных копункторов, Лит. матем. сб., V, 3 (1965), 381–389.
4. В. И. Близникас, Линейные дифференциально-геометрические связности высшего порядка в пространстве опорных элементов, Изд. высш. учебн. завед., мат., 5, 54(1966), 13–24.
5. В. И. Близникас, Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов, Лит. матем. сб., VI, 2 (1966), 141–209.
6. Б. Л. Лаптев, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных в пространстве тензорных опорных элементов, Учен. записи Канского гос. у-та, **118**, кн. 4 (1958), 75–147.
7. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского мат. об-ва, **2** (1953), 257–382.
8. В. Г. Лемлейн, Локальные центро-проективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии, Лит. матем., сб., IV, 1(1964), 41–132.
9. С. П. Мазиляускайте (Жяукене), Тензоры кручения и кривизны пространства центральных пункторов, Лит. матем., сб., V, 3(1965), 427–433.

CENTRINIŲ PUNKTORIŲ ERDVĖS SĄRYŠIAI

S. Žiaukienė

(Reziumė)

Šiame straipsnyje yra nagrinėjama G. Laptevo metodu centrinių punktorių erdvės struktūra, tiesiniai sąryšiai, horizontalūs centro-projektyviniai ir kiti sąryšiai. Straipsnyje duodamos nvariantinio diferencijavimo operacijos, Ričči ir Bianki tapatybės.

ON POSITIONAL CONNECTIONS OF CENTRAL PUNCTORS SPACE

S. Žiaukienė

(Summary)

The article is written by means of the method of G. Laptev. The structure of Central Punctors space, linear connections, horizontal center-projective and other connections are considered in it. The article gives costruction of invariant differentiation apparatus, Ricci and Bianchy identities.