XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1971

УДК 517.537

К ТЕОРИИ ПРИМЕНИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. В. Моржаков

В статье Ю. Ф. Коробейника [1] исследовались некоторые свойства дифференциальных операторов бесконечного порядка, применимых к различным классам аналитических функций одного комплексного переменного. В настоящей работе изучаются аналогичные свойства линейных операторов вида

$$Ly=\sum_{\|n\|=0}^{\infty} b_n \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_k} y(z)}{\partial z_1^{n_1}\ldots \partial z_k^{n_k}}, \tag{1}$$

где $n=(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, $\|n\|=n_1+n_2+\cdots+n_k$, $y(z)=y(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ — аналитическая функция k комплексных переменных из некоторого множества H, входящего в класс $\bar{A}_0$ всех голоморфных в начале координат функций.

Будем говорить, что оператор Ly применим к множеству H в точке $z=0$, если ряд

$$\sum_{\|n\|=0}^{\infty} b_n \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_k} y(0)}{\partial z_1^{n_1}\ldots \partial z_k^{n_k}} \tag{2}$$

сходится для любой функции $y(z)\in H$, и абсолютно применим к H в начале координат, если ряд (2) сходится абсолютно.

Далее, H нормально [1], когда из соотношений $f(z)=\sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_n z^n\in H$ и $|c_n|\leqslant|a_n|$ для всех n следует, что $g(z)=\sum_{\|n\|=0}^{\infty} c_n z^n\in H$. Аналогично, H квазинормально [2], если из $f(z)=\sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_n z^n\in H$ и $|c_n|=|a_n|$ для всех n следует, что $g(z)=\sum_{\|n\|=0}^{\infty} c_n z^n\in H$.

По множеству H образуем множество G_H последовательностей $\{c_n\}=\{c_{n_1 n_2\ldots n_k}\}$ таких, что $\sum_{\|n\|=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n\in H$. Множество G'_H, состоящее из тех и только тех последовательностей $\{u_n\}$, для которых ряд $\sum_{\|n\|=0}^{\infty} c_n u_n$ сходится для $\forall\{c_n\}\in G_H$, назовем дуальным или взаимным к G_H.

Свойство A, введенное Ю. Ф. Коробейником в одномерном случае и играющее важную роль в вопросах применимости, в случае функций многих комплексных переменных формулируется следующим образом: множество H обладает свойством A, если последовательность $\{v_p\}$: $v_p = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} y_n x_{n+p}$, где $\{y_n\} \in G'_H$, $\{x_n\} \in G_H$, $n+p = (n_1+p_1, n_2+p_2, \ldots, n_k+p_k)$ — принадлежит G_H.

Будем говорить, что множество H замкнуто (или инвариантно) относительно сдвига, если вместе с каждой функцией $f(z)$ множество H содержит функцию $f(z+\alpha)$, где $z+\alpha = (z_1+\alpha_1, z_2+\alpha_2, \ldots, z_k+\alpha_k)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — любые конечные комплексные числа.

Множество H замкнуто относительно дифференцирования по z_j, если оно вместе с каждой функцией $y(z)$ содержит функцию $\frac{\partial y(z)}{\partial z_j}$.

В случае функций многих комплексных переменных можно доказать аналоги теорем 1—2, 5—6 работы [1], которые здесь будут только сформулированы, так как их доказательства мало отличаются от соответствующих доказательств в одномерном случае.

Теорема 1. *Пусть H — квазинормальное подмножество $\bar{A}_0$, обладающее свойством A. Тогда, если Ly — любой оператор вида* (1), *применимый к H в точке $z=0$, то, какова бы ни была функция $y(z) \in H$, ряд*

$$\sum_{\|n\|=0}^{\infty} b_n \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_k} y(z)}{\partial z_1^{n_1} \ldots \partial z_k^{n_k}}$$

сходится абсолютно и равномерно (регулярно) внутри некоторого полицилиндра $E_r(y)$ с центром в начале координат, и его сумма принадлежит H.

Теорема 2. *Пусть H — подмножество класса $\bar{A}_0$. Предположим, что любой оператор Ly вида* (1), *применимый к H в точке $z=0$, обладает тем свойством, что какова бы ни была функция $y(z) \in H$, ряд*

$$\sum_{\|n\|=0}^{\infty} b_n \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_k} y(z)}{\partial z_1^{n_1} \ldots \partial z_k^{n_k}}$$

сходится равномерно внутри полицилиндра $E_\delta(y) = \{z : |z_j| < \delta_j(y),\ 1 \leqslant j \leqslant k\}$ к функции из H. Тогда множество H обладает свойством A.

Теорема 3. *Пусть H — квазинормальное подмножество класса A_∞, G_H совершенно и любой оператор вида* (1), *применимый к H в точке $z=0$, обладает тем свойством, что ряд*

$$\sum_{\|n\|=0}^{\infty} b_n \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_k} y(z)}{\partial z_1^{n_1} \ldots \partial z_k^{n_k}}$$

сходится в любой конечной точке z для каждой функции $y \in H$. Тогда множество H замкнуто относительно сдвига.

Множество G_H называется совершенным, если $(G'_H)' = G_H$; через A_∞ обозначен класс всех целых функций k комплексных переменных.

Теорема 4. *Пусть H — какое-нибудь квазинормальное множество целых функций, замкнутое относительно сдвига. Тогда, если оператор (1) применим к H в точке $z=0$, то он регулярно применим к H в C^k. Иначе говоря,*

$$\sum_{\|n\|=0}^{\infty} |b_n| M\left(\bar{E}_R;\ \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_k} y(z)}{\partial z_1^{n_1} \ldots \partial z_k^{n_k}}\right) < \infty,$$

где $\bar{E}_R = \{z: |z_j| \leqslant R_j,\ 1 \leqslant j \leqslant k\}$; $R_1, R_2, \ldots, R_k$ — любые положительные числа,

$$M\left(\bar{E}_R;\ \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_k} y(z)}{\partial z_1^{n_1} \ldots \partial z_k^{n_k}}\right) = \max_{z \in \bar{E}_R} \left| \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_k} y(z)}{\partial z_1^{n_1} \ldots \partial z_k^{n_k}} \right|.$$

Далее введем пять типов координатных множеств G_H (классификация аналогична классификации Ю. Ф. Коробейника для аналитических функций одного комплексного переменного), охватывающих все практически известные классы квазинормальных множеств аналитических функций.

Будем говорить, что положительная функция $\varphi(n) = \varphi(n_1, \ldots, n_k)$ целочисленных аргументов, определенная при $\|n\| > N$, $n_j \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant k$, монотонно растущая по каждому целочисленному переменному, обладает свойством Q, если

$$\lim_{\|n\| \to \infty} \frac{\ln \|n\|}{\varphi(n)} = 0, \tag{3}$$

и свойством Q', если

$$\overline{\lim_{\|n\| \to \infty}} \frac{\ln \|n\|}{\varphi(n)} < \infty. \tag{4}$$

Например, функции

$$\varphi_1(n) = \|n\|,$$

$$\varphi_2(n) = \|n\| \ln \|n\|,$$

$$\varphi_3(n) = \frac{n_1}{\rho_1} \ln n_1 + \cdots + \frac{n_k}{\rho_k} \ln n_k, \quad \rho_j > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k,$$

$$\varphi_4(n) = n_1^{q_1} + \cdots + n_k^{q_k}, \quad q_j > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k$$

обладают свойством Q, а функция $\varphi_5(n) = \ln \|n\|$ обладает свойством Q', но не обладает свойством Q.

Через G_1, $\bar{G}_1$, G_0, $\bar{G}_\infty$ и $\tilde{G}_1$ обозначим множество последовательностей $\{c_n\}$, удовлетворяющих соответственно следующим пяти соотношениям:

1) $G_1^{\{A_n\}}(\varphi)$: $\overline{\lim\limits_{\|n\|\to\infty}} \left|\frac{c_n}{A_n}\right|^{\frac{1}{\varphi(n)}} \leqslant 1$;

2) $\bar{G}_1^{\{A_n\}}(\varphi)$: $\overline{\lim\limits_{\|n\|\to\infty}} \left|\frac{c_n}{A_n}\right|^{\frac{1}{\varphi(n)}} < 1$;

3) $G_0^{\{A_n\}}(\varphi)$: $\lim\limits_{\|n\|\to\infty} \left|\frac{c_n}{A_n}\right|^{\frac{1}{\varphi(n)}} = 0$;

4) $\bar{G}_\infty^{\{A_n\}}(\varphi)$: $\overline{\lim\limits_{\|n\|\to\infty}} \left|\frac{c_n}{A_n}\right|^{\frac{1}{\varphi(n)}} < \infty$;

5) $\tilde{G}_1^{\{A_n\}}(\varphi)$: $\overline{\lim\limits_{\|n\|\to\infty}} \left|\frac{c_n}{A_n}\right|^{\frac{1}{\varphi(n)}} = 1$, где $\varphi(n) = \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Последовательность положительных чисел A_n и функция $\varphi(n)$ постоянны для каждого данного множества G_H.

В случае $k=1$ свойство Q введено в работе [1].

Будем говорить, что последовательность $\{b_n\}$ является обобщенной мажорантой последовательности $\{a_n\}$, если существует номер N такой, что $|a_n| \leqslant |b_n|$ для всех n таких, что $\|n\| > N$.

В дальнейшем потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть G – квазинормальное множество последовательностей $\{c_n\}$ и H его собственное квазинормальное подмножество. Если для каждой последовательности $\{a_n\} \in G$ существует обобщенная мажоранта $\{b_n\} \in H$, то $G' = H'$.*

Доказательство. Включение $G' \subseteq H'$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $\{u_n\} \in H'$ и $\{a_n\} \in G$. Тогда

$$\sum_{\|n\|>N} |a_n|\,|u_n| \leqslant \sum_{\|n\|>N} |b_n|\,|u_n| < \infty,$$

где $\{b_n\} \in H$ – обобщенная мажоранта $\{a_n\}$. Отсюда следует, что $\{u_n\} \in G'$ и $H' = G'$.

Если множество G_H принадлежит одному из пяти вышеуказанных типов, то так же, как и в одномерном случае, можно дать характеристику взаимного к нему множества G'_H.

Теорема 5. *Если $\varphi(n)$ обладает свойством Q, то*

а) $\left(G_1^{\{A_n\}}(\varphi)\right)' = \bar{G}_1^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\varphi)$;

б) $\left(\bar{G}_1^{\{A_n\}}(\varphi)\right)' = G_1^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\varphi)$;

в) $\left(\tilde{G}_1^{\{A_n\}}(\varphi)\right)' = \bar{G}_1^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\varphi)$.

Проведем доказательство утверждения а). Утверждение б) доказывается аналогично. Пусть $\{d_n\}\in \bar{G}_1^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}$ и $\{x_n\}$ — произвольная последовательность из $G_1^{\{A_n\}}(\varphi)$. Тогда

$$\overline{\lim_{\|n\|\to\infty}}\ |d_n A_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}}=\frac{1}{1+3d},\ d>0;\qquad \overline{\lim_{\|n\|\to\infty}}\left|\frac{x_n}{A_n}\right|^{\frac{1}{\varphi(n)}}\leqslant 1$$

и для $n\in Q_N=\{n:\ \|n\|\leqslant N\}$

$$|d_n|<\frac{A(d)}{A_n(1+2d)^{\varphi(n)}},\qquad |x_n|<B(d)\ A_n\ (1+d)^{\varphi(n)}$$

откуда следует, что

$$|d_n x_n|<A(d)\,B(d)\left(\frac{1+d}{1+2d}\right)^{\varphi(n)}=Cq^{\varphi(n)},\quad q<1\,.$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{\|n\|>N} q^{\varphi(n)}$ при выполнении условия Q сходится для всех $q\in(0,1)$, а при выполнении условия Q' — для всех достаточно малых $q>0$.

Так как

$$\lim_{\|n\|\to\infty}\frac{\ln\|n\|}{\varphi(n)}=0,$$

то

$$\sum_{\|n\|=0}^{\infty}|d_n x_n|<\infty$$

и

$$\bar{G}_1^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\varphi)\subseteq\left(G_1^{\{A_n\}}(\varphi)\right)'.$$

Пусть теперь $\{d_n\}\in\bar{G}_1^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\varphi)$, тогда

$$\overline{\lim_{\|n\|\to\infty}}\ |d_n\cdot A_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}}\geqslant 1.$$

Перейдем к обычному пределу:

$$\lim_{\nu\to\infty}|d_{n_\nu}\cdot A_{n_\nu}|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}}=\alpha\geqslant 1.$$

Положим $c_n=0$, если $n\neq n_\nu$ и $c_{n_\nu}=\frac{1}{d_{n_\nu}}$. Очевидно, что $\{c_n\}\in G_1^{\{A_n\}}(\varphi)$, но

$$\sum_{\|n\|=0}^{\infty}c_n d_n=\infty\quad\text{и}\quad\{d_n\}\notin\left(G_1^{\{A_n\}}(\varphi)\right)'.$$

Следовательно,

$$\left(G_1^{\{A_n\}}(\varphi)\right)' \subseteq \bar{G}_1^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\varphi)$$

и утверждение а) доказано.

Утверждение в) следует непосредственно из леммы. Действительно,

$$\tilde{G}_1^{\{A_n\}}(\varphi) \subset G_1^{\{A_n\}}(\varphi).$$

Если $\{a_n\} \in G_1 \setminus \tilde{G}_1$, то

$$\overline{\lim_{\|n\| \mapsto \infty}} \left| \frac{a_n}{A_n} \right|^{\frac{1}{\varphi(n)}} < 1$$

и, следовательно, последовательность $\{A_n\}$ является обобщенной мажорантой для $\{a_n\}$.

Значит,

$$\left(\tilde{G}_1^{\{A_n\}}(\varphi)\right)' = \left(G_1^{\{A_n\}}(\varphi)\right)' = \bar{G}_1^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\varphi).$$

Теорема 6. *Если* $\varphi(n)$ *обладает свойством* Q', *то*

г) $\left(G_0^{\{A_n\}}(\varphi)\right)' = \bar{G}_\infty^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\varphi)$;

д) $\left(\bar{G}_\infty^{\{A_n\}}(\varphi)\right)' = G_0^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\varphi)$.

Доказательство. Пусть

$$\{d_n\} \in \bar{G}_\infty^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\varphi), \quad \{x_n\} \in G_0^{\{A_n\}}(\varphi).$$

Тогда

$$\overline{\lim_{\|n\| \mapsto \infty}} |d_n A_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}} < \infty, \quad \lim_{\|n\| \mapsto \infty} \left| \frac{x_n}{A_n} \right|^{\frac{1}{\varphi(n)}} = 0.$$

Существуют числа $q > 0$, $M > 0$ и $N(M, q) = N$, такие, что

$$|d_n| < \frac{M^{\varphi(n)}}{A_n}, \quad |x_n| < q^{\varphi(n)} \cdot A_n$$

для

$$\forall n : \|n\| > N.$$

Отсюда

$$|d_n x_n| < (Mq)^{\varphi(n)}.$$

Так как

$$\overline{\lim_{\|n\| \mapsto \infty}} \frac{\ln \|n\|}{\varphi(n)} < \infty,$$

а число q можно выбрать как угодно малым, то

$$\sum_{\|n\|=0}^{\infty} |d_n x_n| < \infty \quad \text{и} \quad \bar{G}_{\infty}^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\varphi) \subseteq \left(G_0^{\{A_n\}}(\varphi)\right)'.$$

Доказательство обратного включения проделывается по существу так же, как и в случае а). Утверждение д) доказывается аналогично.

В работе [1] для случая $k=1$ даются критерии того, что множества G_1, $\bar{G}_1$, G_0 и $\bar{G}_\infty$ обладают свойством A. Соответствующие критерии могут быть даны и для случая $k>1$.

Будем говорить, что функция $\varphi(n)$ удовлетворяет условию $Q_1(Q_1')$, если она обладает свойством $Q(Q')$ и, кроме того,

$$\sup_{\substack{\|n\|>N \\ \|s\|>N}} \frac{\varphi(n+s)}{\varphi(n)+\varphi(s)} = L < \infty. \tag{5}$$

Теорема 7. *Пусть $\varphi(n)$ удовлетворяет условию Q. Для того, чтобы соответствующее пространство $G_1^{\{A_n\}}(\varphi)$ обладало свойством A, необходимо, а в случае, если $\varphi(n)$ удовлетворяет условию Q_1, и достаточно, чтобы*

$$\varlimsup_{\|s\|\to\infty} \sup_n \left(\frac{A_{n+s}}{A_n\cdot A_s}\right)^{\frac{1}{\varphi(n+s)}} \leqslant 1. \tag{6}$$

Теорема 8. *Пусть $\varphi(n)$ удовлетворяет условию Q. Тогда для того, чтобы $\bar{G}_1^{\{A_n\}}(\varphi)$ обладало свойством A, необходимо и достаточно, чтобы числа A_n удовлетворяли условию* (6).

Теорема 9. *Пусть $\varphi(n)$ удовлетворяет условию Q'. Для того, чтобы $\bar{G}_\infty^{\{A_n\}}(\varphi)$ обладало свойством A, необходимо, чтобы*

$$\varlimsup_{\|s\|\to\infty} \sup_n \left(\frac{A_{n+s}}{A_n\cdot A_s}\right)^{\frac{1}{\varphi(n+s)}} < \infty. \tag{7}$$

Это же условие и достаточно, если $\varphi(n)$ удовлетворяет условию Q_1'.

Теорема 10. *Если $\varphi(n)$ удовлетворяет условию Q', то для того, чтобы $G_0^{\{A_n\}}(\varphi)$ обладало свойством A, необходимо и достаточно, чтобы числа A_n удовлетворяли условию* (7).

Теоремы 7–10 доказываются примерно по одному плану; приведем доказательство одной из них, скажем, теоремы 9.

Необходимость. Пусть

$$\varlimsup_{\|s\|\to\infty} \sup_n \left(\frac{A_{n+s}}{A_n\cdot A_s}\right)^{\frac{1}{\varphi(n+s)}} = \infty.$$

Тогда $\exists\{s_\nu\}$ такая, что

$$\sup_n \left(\frac{A_{n+s_\nu}}{A_n\cdot A_{s_\nu}}\right)^{\frac{1}{\varphi(n+s_\nu)}} > \nu^2.$$

Для $\forall s_\nu$ $\exists n_\nu$ такое, что

$$A_{n_\nu+s_\nu} > A_{n_\nu}\cdot A_{s_\nu}\cdot \nu^{2\varphi(n_\nu+s_\nu)}.$$

Положим $x_n = A_n$; $y_n = 0$, если

$$n\neq n_\nu,\quad y_{n_\nu} = \frac{1}{\nu^{\varphi(n_\nu)}\cdot A_{n_\nu}}.$$

Очевидно

$$\{x_n\}\in \bar G_\infty^{\{A_n\}}(\varphi) \quad \text{и} \quad \{y_n\}\in G_0^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\varphi).$$

Пусть $v_s = \sum\limits_{\|n\|=0}^{\infty} x_{n+s}y_n$. При $s = s_\nu$

$$v_{s_\nu}\geqslant x_{n_\nu+s_\nu}\cdot y_{n_\nu}\geqslant A_{s_\nu}\cdot\nu^{2\varphi(n_\nu+s_\nu)-\varphi(n_\nu)}\geqslant A_{s_\nu}\,\nu^{\varphi(s_\nu)}.$$

Отсюда

$$\varlimsup_{\|s\|\to\infty}\left|\frac{v_s}{A_s}\right|^{\frac{1}{\varphi(s)}} = \infty \quad \text{и} \quad \{v_s\}\,\bar{\in}\, G_0^{\{A_n\}}(\varphi).$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть

$$\{x_n\}\in \bar G_\infty^{\{A_n\}}(\varphi),\quad \{y_n\}\in G_0^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\varphi);$$

тогда

$$\lim_{\|n\|\to\infty} |y_n A_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}} = 0$$

и для $\|n\|>N$

$$|x_n| < A(M)\,A_n M^{\varphi(n)},\quad |y_n| < \frac{B(\varepsilon)\,\varepsilon^{\varphi(n)}}{A_n}.$$

Рассмотрим последовательнось $\{w_s\}$:

$$w_s = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} |x_{n+s}|\,|y_n| = \sum_{\|n\|\leqslant N_1} |x_{n+s}|\,|y_n| + \sum_{\|n\|>N_1} |x_{n+s}|\,|y_n| = \sum\nolimits_1^s + \sum\nolimits_2^s,$$

где N_1 выберем позже. Очевидно, что $\sum_1^s < \infty$ при любом фиксированном s.

Число N_1 выберем так: 1) $N_1\geqslant N$; 2) $\sup\limits_n \left(\frac{A_{n+s}}{A_n\cdot A_s}\right)^{\frac{1}{\varphi(n+s)}} < K$ для $\forall s$: $\|s\|>N_1$. Отсюда следует, что $A_{n+s} < A_n\cdot A_s\,K^{\varphi(n+s)}$ при $\|s\|>N_1$.

Оценим $\sum_1^s$. Если $\|s\| \leqslant N_1$, то $\sum_1^s \leqslant C = \text{const}$; если же $\|s\| > N_1$, то

$$\sum_1^s \leqslant A(M)\, B(\varepsilon) \sum_{\|n\| \leqslant N_1} A_{n+s}\, M^{\varphi(n+s)}\, |y_n| \leqslant$$

$$\leqslant A(M)\, B(\varepsilon) \sum_{\|n\| \leqslant N_1} A_s K^{\varphi(n+s)}\, M^{\varphi(n+s)} \cdot A_n |y_n| \leqslant$$

$$\leqslant A(M)\, B(\varepsilon)\, A_s\, P^{2L\varphi(s)} \sum_{\|n\| \leqslant N_1} A_n |y_n| (P^{2L}\varepsilon)^{\varphi(n)} = E_1 A_s P^{2L\varphi(s)},$$

где

$$P = \max\{K,\ M,\ 1\} \quad \text{и} \quad \varepsilon < \frac{1}{P^{2L}}.$$

Оценим $\sum_2^s$ при любом s.

Из условия 2) для числа N_1 следует, что $\left(\frac{A_{n+s}}{A_n \cdot A_s}\right)^{\frac{1}{\varphi(n+s)}} < K$ для всех s при $\|n\| > N_1$.

Поэтому

$$\sum_2^s \leqslant A(M)\, B(\varepsilon)\, A_s\, P^{2L\varphi(s)} \sum_{\|n\| > N_1} K^{\varphi(n+s)}\, M^{\varphi(n+s)}\, \varepsilon^{\varphi(n)} \leqslant$$

$$\leqslant A(M)\, B(\varepsilon)\, A_s\, P^{2L\varphi(s)} \sum_{\|n\| > N_1} (P^{2L}\varepsilon)^{\varphi(n)} = E_2 A_s \cdot P^{2L\varphi(s)},$$

так как величина $P^{2L}\varepsilon$ может быть сделана как угодно малой, а функция φ удовлетворяет условию Q_1'.

Следовательно, доказано: во-первых, $w_s < \infty$ для любого s, и, во-вторых, при $\|s\| > N_1$ $w_s \leqslant E_3 A_s \cdot P^{2L\varphi(s)}$. Отсюда $\{w_s\} \in \bar{G}_\infty^{\{A_n\}}(\varphi)$ и теорема доказана.

В заключение рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих вышеизложенную теорию.

Наиболее общим примером пространства, входящего в нашу классификацию, является степенное пространство Кете [5].

Пусть $a_{\alpha n}$ — матрица положительных чисел, где α — целое положительное число, n — k-мерный вектор $n = (n_1, \ldots, n_k)$. Через $M(a_{\alpha n})$ обозначается так называемое пространство Кете всех последовательностей $\xi = \{\xi_n\} = \{\xi_{n_1 \cdots n_k}\}$ комплексных чисел, таких, что

$$\|\xi\|_\alpha = \sup_n a_{\alpha n} |\xi_n| < \infty.$$

Если $a_{\alpha n} = d_n a_n^\alpha$, где $a_n \to +\infty$, или $a_{\alpha n} = d_n b_n^{\frac{1}{\alpha}}$, где $b_n \to 0$, а $\{d_n\}$ — произвольная последовательность, то пространства $M(d_n a_n^\alpha)$ и $M\left(d_n b_n^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ называются степенными пространствами Кете. Для многих классов голоморфных функций тейлоровские коэффициенты функций, принадлежащих данному классу, образуют соответствующее пространство Кете.

Теорема [5]. *Пусть* $M(d_n a_n^\alpha)$ $\left(\text{соотв. } M\left(d_n b_n^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)$ *— степенное пространство Кете, тогда* $\xi=\{\xi_n\}\in M(d_n a_n^\alpha)$ $\left(\text{соотв. } \xi=\{\xi_n\}\in M\left(d_n b_n^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{\|n\|\to\infty} |d_n \xi_n|^{\frac{1}{\ln a_n}}=0$ $\left(\text{соотв. } \varlimsup\limits_{\|n\|\to\infty} |d_n \xi_n|^{\frac{1}{|\ln b_n|}}\leqslant 1\right)$.

Предположим, что функция $\varphi(n)=\ln a_n$ (соотв. $\varphi(n)=|\ln b_n|$) удовлетворяет условию Q' (соотв. Q), тогда $M(d_n a_n^\alpha)=G_0^{\left\{\frac{1}{d_n}\right\}}(\varphi)$ $\left(\text{соотв. } M\left(d_n b_n^{\frac{1}{\alpha}}\right)=\right.$ $\left.=G_1^{\left\{\frac{1}{d_n}\right\}}(\varphi)\right)$.

Рассмотрим теперь в качестве конкретных примеров наиболее часто встречающиеся классы аналитических функций.

1) $H=\bar{A}_0$ — пространство всех голоморфных в начале координат функций.

$$G_H=\bar{G}_\infty^{\{n!\}}(\|n\|),\quad G'_H=G_0^{\left\{\frac{1}{n!}\right\}}(\|n\|).$$

2) $H=A(D)$ — пространство функций, голоморфных в полной k-круговой области D с центром в начале координат.

$$G_H=G_1^{\left\{\frac{n!}{d_n}\right\}}(\|n\|),\quad G'_H=\bar{G}_1^{\left\{\frac{d_n}{n!}\right\}}(\|n\|),$$

где

$$d_n=d_n(D)=\sup_{z\in D}|z|^n.$$

3) $H=A_\infty$ — пространство всех целых функций.

$$G_H=G_0^{\{n!\}}(\|n\|),\ G'_H=\bar{G}_\infty^{\left\{\frac{1}{n!}\right\}}(\|n\|).$$

Через H_μ будем обозначать пространство всех целых функций, для которых

$$\|f\|=\sup_{z\in C^k}|f(z)|\,\mu(\varepsilon,z)<\infty\quad \text{при } \forall\varepsilon>0,$$

где $\mu(\varepsilon, z)$ — неотрицательная функция, определенная для $0<\varepsilon<1$, $z\in C^k$, невозрастающая по ε и такая, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu(\varepsilon,z)>0$ для $\forall z\in C^k$.

4) $H=H_\mu$, $\mu=\exp\left(-\sum\limits_{j=1}^{k}(\tau_j+\varepsilon)\Big|\ln|z_j|\Big|^{p_j}\right)$, $p_j>1$.

$$G_H=G_1^{\left\{\frac{n!}{d_n}\right\}}(\varphi),\quad G'_H=\bar{G}_1^{\left\{\frac{d_n}{n!}\right\}}(\varphi),$$

где

$$\varphi(n)=n_1^{q_1}+\cdots+n_k^{q_k},\quad q_j=\frac{p_j}{p_j-1},$$

$$d_n=\prod_{j=1}^{k}\exp\left[n_j^{q_j}\left(\frac{1}{p_j}\right)^{q_j-1}\left(\frac{1}{\tau_j}\right)^{\frac{1}{p_j-1}}\frac{1}{q_j}\right].$$

5) $H=H_\mu,\quad \mu=\exp\left(-\varepsilon\sum_{j=1}^{k}\left|\ln|z_j|\right|^{p_j}\right),\quad p_j>1.$

$$G_H=G_0^{\{n!\}}(\varphi),\quad G'_H=\bar{G}_\infty^{\left\{\frac{1}{n!}\right\}}(\varphi),$$

где

$$\varphi(n)=n_1^{q_1}+\cdots+n_k^{q_k},\quad q_j=\frac{p_j}{p_j-1}.$$

6) $H=H_\mu,\quad \mu=\exp\left(-\sum_{j=1}^{k}(\tau_j+\varepsilon)|z_j|^{p_j}\right),\quad p_j,\ \tau_j>0.$

$$G_H=G_1^{\left\{\frac{n!}{d_n}\right\}}(\|n\|),\quad G'_H=\bar{G}_1^{\left\{\frac{d_n}{n!}\right\}}(\|n\|),$$

где

$$d_n=\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{n_j}{p_j\tau_j e}\right)^{\frac{n_j}{p_j}}.$$

7) $H=H_\mu,\quad \mu=\exp\left(-\varepsilon\sum_{j=1}^{k}|z_j|^{p_j}\right),\quad p_j>0.$

$$G_H=G_0^{\left\{\frac{n!}{d_n}\right\}}(\|n\|),\quad G'_H=\bar{G}_\infty^{\left\{\frac{d_n}{n!}\right\}}(\|n\|),$$

где

$$d_n=\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{n_j}{p_j e}\right)^{\frac{n_j}{p_j}}.$$

8) $H=H_\mu,\quad \mu=\exp\left(-\sum_{j=1}^{k}|z_j|^{p_j+\varepsilon}\right),\quad p_j>0.$

$$G_H=G_1^{\left\{\frac{n!}{d_n}\right\}}(\varphi),\quad G'_H=\bar{G}_1^{\left\{\frac{d_n}{n!}\right\}}(\varphi),$$

где

$$\varphi(n)=n_1\ln n_1+\cdots+n_k\ln n_k,\quad d_n=\prod_{j=1}^{k}n_j^{\frac{n_j}{p_j}}.$$

9) $H=H_\mu,\quad \mu=\exp\left(-\sum_{j=1}^{k}|z_j|^{\varepsilon}\right),$

$$G_H=G_0^{\{n!\}}(\varphi),\quad G'_H=\bar{G}_\infty^{\left\{\frac{1}{n!}\right\}}(\varphi),$$

где

$$\varphi(n)=n_1\ln n_1+\cdots+n_k\ln n_k.$$

10) $H=L_\rho$ — пространство всех целых функций порядка ρ по совокупности переменных.

$$G_H=\tilde{G}_1^{\{D^{\|n\|\ln\|n\|}\}}(\|n\|\ln\|n\|),\quad D=e^{1-\frac{1}{\rho}},$$

$$G'_H=\bar{G}_1^{\{D^{-\|n\|\ln\|n\|}\}}(\|n\|\ln\|n\|),\quad 0<\rho<\infty.$$

11) $H=D_\rho=[\rho,\ 0)$ — пространство всех целых функций порядка $<\rho$ по совокупности переменных.

$$G_H=\bar{G}_1^{\{D^{\|n\|\ln\|n\|}\}}(\|n\|\ln\|n\|),\quad D=e^{1-\frac{1}{\rho}},$$

$$G'_H=G_1^{\{D^{-\|n\|\ln\|n\|}\}}(\|n\|\ln\|n\|),\quad 0<\rho<\infty.$$

12) $H=F_\rho=[\rho,\ \infty]$ — пространство всех целых функций порядка $\leqslant\rho$ по совокупности переменных.

$$G_H=G_1^{\{D^{\|n\|\ln\|n\|}\}}(\|n\|\ln\|n\|),\quad D=e^{1-\frac{1}{\rho}},$$

$$G'_H=\bar{G}_1^{\{D^{-\|n\|\ln\|n\|}\}}(\|n\|\ln\|n\|),\quad 0<\rho<\infty.$$

13) $H=\{\rho,\ \sigma_D\}$ — пространство всех целых функций порядка $\rho>0$ и типа $\sigma_D>0$ по совокупности переменных.

$$G_H=\bar{G}_1^{\{A_n\}}(\|n\|),\quad G'_H=\bar{G}_1^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\|n\|),$$

где

$$A_n=\frac{n!\,(\rho\sigma_D)^{\frac{\|n\|}{\rho}}}{d_n(D)\,(\|n\|!)^{\frac{1}{\rho}}},\quad d_n(D)=\sup_{z\in D}|z|^n.$$

14) $H=[\rho,\ \sigma_D]$ — пространство всех целых функций порядка $<\rho$ или порядка ρ, но типа $\leqslant\sigma_D$ (порядок и тип рассматриваются по совокупности переменных).

$$G_H=G_1^{\{A_n\}}(\|n\|),\quad G'_H=\bar{G}_1^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\|n\|),$$

где

$$A_n=\frac{n!\,(\rho\sigma_D)^{\frac{\|n\|}{\rho}}}{d_n(D)\,(\|n\|!)^{\frac{1}{\rho}}}.$$

15) $H=[\rho, \sigma_D)$ — пространство всех целых функций порядка $<\rho$ или порядка ρ, но типа $<\sigma_D$.

$$G_H=\bar{G}_1^{\{A_n\}}(\|n\|), \quad G'_H=G_1^{\left\{\frac{1}{A_n}\right\}}(\|n\|),$$

а числа A_n такие же, как и в предыдущем примере.

Выражения для G_H в примерах 2—9 взяты из работы [5].

Очевидно, пространство всех целых функций замкнуто относительно сдвига. Легко показать, что пространства функций в примерах 4—5 и 6—12 также замкнуты относительно сдвига. Для последних это следует из того, что система сопряженных порядков и система сопряженных типов целой функции, а также порядок целой функции по совокупности переменных не меняется при сдвиге аргумента функции на конечный вектор h.

Аналогичное утверждение для D-типа целой функции не является тривиальным, так как D-тип, вообще говоря, меняется с изменением области D.

Покажем, что D-тип не меняется при сдвиге аргумента на h. Для этого заметим сначала, что имеется весьма простая связь между типами подобных областей D и D_R.

$$(e\rho\sigma_D)^{\frac{1}{\rho}}=\overline{\lim_{\|n\|\to\infty}}\left\{\|n\|^{\frac{1}{\rho}}\left[|c_n|\,d_n(D_R)\right]^{\frac{1}{\|n\|}}\right\}=$$

$$=R\overline{\lim_{\|n\|\to\infty}}\left\{\|n\|^{\frac{1}{\rho}}\left[|c_n|\,d_n(D)\right]^{\frac{1}{\|n\|}}\right\}=R\,(e\rho\sigma_D)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Отсюда $\sigma_{D_R}=R^\rho\,\sigma_D$. Используя это, получим:

$$\max_{\frac{z}{R}\in D}|g(z)|=\max_{\frac{z}{R}\in D}|f(z+h)|=\max_{\frac{z}{R}\in D+\frac{h}{R}}|f(z)|\leqslant\max_{\frac{z}{R}\in D_{R_1}}|f(z)|,$$

где R_1 — любое число >1. Нетрудно показать, что D_{R_1} содержит $D+\frac{h}{R}$ при достаточно больших R.

Следовательно, $\sigma_D(g)\leqslant\sigma_{D_{R_1}}=R_1^\rho\,\sigma_D(f)$. Устремляя R_1 к 1, получим $\sigma_D(g)\leqslant\sigma_D(f)$. Аналогично найдем, что $\sigma_D(g)\geqslant\sigma_D(f)$.

Отсюда следует, что пространства функций в примерах 13—15 замкнуты относительно сдвига.

Рассмотрим некоторые следствия из теорем 7—10.

1. Свойство A выполняется для пространств $\bar{A}_0$, A_∞ и H_μ для $\mu=\exp\left(-\sum_{j=1}^{k}|z_j|^\varepsilon\right)$, $\mu=\exp\left(-\varepsilon\sum_{j=1}^{k}|z_j|^{p_j}\right)$, а также для классов $D_\rho=[\rho, 0)$ и $F_\rho=[\rho, \infty]$ при любых $\rho\in(0, \infty)$.

2. Пространства H в примерах 4—5 обладают свойством A при всех $p_j>1$, а в примерах 6, 8 тогда и только тогда, когда $p_j\leqslant 1$, $1\leqslant j\leqslant k$.

Эти следствия позволяют на основании вышеприведенных теорем установить ряд результатов относительно применимости операторов вида (1) к пространствам 1—5.

Так, для применимости оператора (1) к квазинормальному множеству функций $H\subseteq \bar{A}_0$ в точке $z=0$ необходимо и достаточно, чтобы $\{b_n\}\in G'_H$.

Применяя к пространствам 3 – 15 теорему 4, получим, что для применимости оператора (1) к указанным пространствам всюду в C^k (в любой точке $z\in C^k$) необходимо и достаточно, чтобы $\{b_n\}\in G'_H$. Если это условие выполнено, то оператор (1) регулярно применим в C^k к этим пространствам.

Как уже отмечалось выше, пространства 1, 3 – 5, 6 – 8 ($p_j\leqslant 1$, $1\leqslant j\leqslant k$), 9, 11 – 12 обладают свойством A. Следовательно, результат применения оператора (1) к любому из этих пространств принадлежит этому же пространству.

Далее рассмотрим оператор

$$\tilde{L}y=\sum_{m=0}^{\infty} c_m\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial z_1}+\cdots+\alpha_k\frac{\partial}{\partial z_k}\right)^m y(z), \tag{8}$$

$\alpha_j\neq 0$, $1\leqslant j\leqslant k$.

Легко видеть, что применимость этого оператора к квазинормальному множеству $H\subseteq \bar{A}_0$ в точке $z=0$ совпадает с абсолютной применимостью оператора

$$\sum_{m=0}^{\infty}|c_m|\left(|\alpha_1|\frac{\partial}{\partial z_1}+\cdots+|\alpha_k|\frac{\partial}{\partial z_k}\right)^m y(z).$$

Если H к тому же замкнуто относительно сдвига, то для оператора (8) справедливо свойство „заразительности“, т. е. из применимости оператора к H в начале координат следует его регулярная применимость к H в C^k. Таким образом, на квазинормальном множестве функций $H\subseteq \bar{A}_0$ оператор (8) сводится к оператору (1).

$$\tilde{L}y=\sum_{\|n\|=0}^{\infty} b_n\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_k}y(z)}{\partial z_1^{n_1}\cdots\partial z_k^{n_k}},$$

где

$$b_n=c_{\|n\|}\frac{\alpha^n\,\|n\|!}{n!}.$$

Выпишем условия применимости операторов (1) и (8) к некоторым конкретным квазинормальным классам функций из $\bar{A}_0$.

а) Для применимости оператора Ly (соотв. $\tilde{L}y$) к $\bar{A}_0$ в точке $z=0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\|n\|\to\infty}\sqrt[\|n\|]{|b_n|\,n!}=0 \tag{9}$$

$$\left(\text{соотв. } \lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|c_m|\,m!}=0\right). \tag{10}$$

Операторы Ly и $\tilde{L}y$ сохраняют преобразование сдвига: если $y(z)=$ $=y(u+h)=\varphi(u)$, то $Ly(z)=Ly(u+h)=L\varphi(u)$ $\left(\text{соотв. } \tilde{L}y(z)=\tilde{L}y(u+h)=\tilde{L}\varphi(u)\right)$.

Поэтому условия (9) и (10) необходимы и достаточны для применимости соответственно операторов Ly и $\tilde{L}y$ к классу всех голоморфных функций в точках голоморфности.

б) Для применимости оператора Ly (соотв. $\tilde{L}y$) к A_∞ необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{\|n\|\to\infty}} \sqrt[\|n\|]{|b_n|\, n!} < \infty$$

$$(\text{соотв. } \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|c_m|\, m!} < \infty).$$

в) Для применимости оператора Ly (соотв. $\tilde{L}y$) к пространству L_ρ необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{\|n\|\to\infty}} |b_n|^{\frac{1}{\|n\|\ln\|n\|}} < e^{\frac{1}{\rho}-1}$$

$$\left(\text{соотв. } \overline{\lim_{m\to\infty}} |c_m|^{\frac{1}{m\ln m}} < e^{\frac{1}{\rho}-1}\right).$$

г) Если в примере 4 из вышеприведенной группы примеров пространств H положить $p_j=1$, $\tau_j=\sigma>0$, $1\leqslant j\leqslant k$, то получим класс целых функций экспоненциального типа $\leqslant\sigma$ по совокупности переменных. Для применимости оператора Ly (соотв. $\tilde{L}y$) к этому классу необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{\|n\|\to\infty}} \sqrt[\|n\|]{\frac{|b_n|\, n!}{\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{n_j}{e}\right)^{n_j}}} < \frac{1}{\sigma},$$

или

$$\overline{\lim_{\|n\|\to\infty}} \sqrt[\|n\|]{|b_n|} < \frac{1}{\sigma}$$

$$\left(\text{соотв. } \overline{\lim_{\|n\|\to\infty}} \sqrt[\|n\|]{|c_{\|n\|}|\, |\alpha|^n \frac{\|n\|!}{n!}} < \frac{1}{\sigma}\right).$$

д) Для применимости оператора Ly (соотв. $\tilde{L}y$) к классу экспоненциальных функций минимального типа необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{\|n\|\to\infty}} \sqrt[\|n\|]{|b_n|} < \infty$$

$$(\text{соотв. } \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|c_m|} < \infty).$$

Таким образом, здесь в качестве частных случаев получены все теоремы В. П. Громова [3].

Заметим, что результат примера г) для оператора $\tilde{L}y$ не совпадает с соответствующим результатом В. П. Громова, даже если положить $\alpha_j=1$,

$1 \leqslant j \leqslant k$ $\left(\text{у Громова условие применимости имеет вид: } \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|c_m|} < \frac{1}{\sigma}\right)$.

По-видимому, последний результат В. П. Громова неверен. Действительно, функция $e^{z_1+z_2}$ принадлежит классу экспоненциальных функций типа $\leqslant 1$ и оператор

$$\tilde{L} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^m, \quad \text{где} \quad c_m = \frac{1}{2^m}, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

применим согласно Громову к функции $e^{z_1+z_2}$, так как

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|c_m|} = \frac{1}{2} < 1.$$

С другой стороны,

$$\tilde{L}e^{z_1+z_2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^m e^{z_1+z_2} = e^{z_1+z_2} \sum_{m=0}^{\infty} 1.$$

Таким образом, на самом деле оператор $\tilde{L}$ не применим к этому классу.

Условие применимости оператора $\tilde{L}$ к классу экспоненциальных функций минимального типа в работе В. П. Громова отсутствует, а применимость операторов L и $\tilde{L}$ к классу L_ρ рассмотрена только в случае $\rho \geqslant 1$.

Автор выражает благодарность Ю. Ф. Коробейнику за научное руководство.

Ростовский Государственный
университет

Поступило в редакцию
10.I.1969

Литература

1. Ю. Ф. Коробейник, О некоторых характеристических свойствах операторов бесконечного порядка, Изд. АН СССР, **30**, вып. 5(1966)., 993–1016.
2. Ю. Ф. Коробейник, О применимости дифференциальных операторов бесконечного порядка, Сибирский математический журнал (в печати).
3. В. П. Громов, О дифференциальных операторах бесконечного порядка в частных производных, Доклады научно-исследовательских работ за 1966–1967 гг., секция математическая, Московский энергетический институт, стр. 39–50.
4. Б. А. Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, 1962.
5. S. Rolewiez, On Cauchy-Hadamard Formula for Koëthe Power Series, Bull. de l'Acadmie Polonaise des Sciences, **X**, 4 (1962), 211–216.

BEGALINĖS EILĖS DIFERENCIALINIŲ OPERATORIŲ DAUGELIO KINTAMŲJŲ FUNKCIJŲ ERDVĖSE PRITAIKOMUMO KLAUSIMU

V. Moržakovas

(*Reziumė*)

Šiame straipsnyje autorius nagrinėja tokio pavidalo diferencialinių operatorių:

$$Ly = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} b_n \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_k} y(z)}{\partial z_1^{n_1} \cdots \partial z_k^{n_k}}$$

pritaikomumą įvairioms daugelio kintamųjų analizinių funkcijų klasėms. Atskiru atveju, remiantis bendrąja teorija, galima įrodyti kai kuriuos V. Gromovo rezultatus.

ON THE APPLICABILITY THEORY TO DIFFERENTIAL OPERATORS OF INFINITE ORDER IN SPACES OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

V. Morzhakov

(*Summary*)

In this paper the author investigates application of the differential operators of the form

$$Ly = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} b_n \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_k} y(z)}{\partial z_1^{n_1} \cdots \partial z_k^{n_k}}$$

to the general classes of the analytical functions of several complex variables. In a particular case the general theory enables to prove some results of V. Gromov.