XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971

УДК 519.21

О СХОДИМОСТИ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ЦЕЛОЗНАЧНЫХ ПРОЦЕССОВ*)

Д. Саас

1. В работах Хинчина [1], Ососкова [2] и Григелиониса [3], [4] найдены теоремы, обнаруживающие причину, в силу которой точечные процессы, возникающие на практике, часто могут быть хорошо аппроксимированы пуассоновскими процессами. Именно в [3] получены необходимые и достаточные условия того, чтобы суммарный процесс независимых бесконечно малых точечных процессов сходился к пуассоновскому. Б. В. Гнеденко выдвинул вопрос о поведении сумм независимых, бесконечно малых ступенчатых процессов, способных принимать и отрицательные приращения. Таким образом, речь идет о точечных процессах, приращения которых принимают лишь значения, кратные некоторому числу, но возможно и отрицательные.

Процессы такого типа встречаются например в теории страхования, где взносы положительны, а возмещения – отрицательны.

У нас $X(t)$ $\left(X(t),\ Z(t)\right)$ с индексом или без индекса будет обозначать ступенчатый процесс, который на любом конечном интервале имеет лишь конечное число скачков, причем скачки могут быть только положительными или отрицательными целыми числами, и $X(0)=0$. Если $I=[a,\ b)$, то будем писать

$$X(I)=X(b)=X(a-0)$$

(интервалы всегда будут конечные).

Рассмотрим схему серий $X_{nk}(t)$ $(1\leqslant k\leqslant k_n)$ при каждом n независимых процессов, и обозначим

$$Y_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}(t) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Предположим, что слагаемые *бесконечно малы*, то есть для любого интервала I

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant k_n} P(X_{nk}(I)\neq 0)=0.$$

Под сходимостью процессов $Y_n(t)$ к процессу $Y(t)$ мы подразумеваем слабую сходимость, то есть слабую сходимость распределений векторов

*) Работа выполнена во время аспирантуры автора в Московском государственном университете на кафедре теории вероятностей.

$\left(Y_n(I_1), \ldots, Y_n(I_r)\right)$ к распределению вектора $\left(Y(I_1), \ldots, Y(I_r)\right)$ при любом выборе интервалов $I_1, \ldots, I_r$, $r=1, 2, \ldots$

Из общих результатов [5] следует, что если процессы $Y_n(t)$, определенные (1), сходятся к некоторому процессу $Y(t)$, то предельный процесс безгранично делим. В [5] указаны необходимые и достаточные условия сходимости.

Особый интерес представляет случай, когда предельный процесс $Y(t)$ имеет независимые приращения. В этом случае для любого интервала I

$$Me^{iuY(I)} = e^{\sum\limits_{s\neq 0} \lambda_s(I)\,(e^{ius}-1)}, \tag{2}$$

где $\lambda_s(I)$ при каждом целом $s\,(\neq 0)$ мера, и

$$\sum_{s\neq 0} |s|\,\lambda_s(I) < \infty$$

(см. [6]). Такие процессы $Y(t)$ называются *сложными пуассоновскими процессами*.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы сформулировать необходимые и достаточные условия для сходимости сумм независимых, бесконечно малых процессов к сложному пуассоновскому. В этом случае условия имеют особый вид, более простой, чем в случае сходимости к любому безгранично делимому процессу. В доказательствах наших теорем мы не используем общие теоремы, а лишь опираемся на одну лемму, являющуюся простым обобщением теоремы о сходимости к пуассоновскому закону [7].

Если дополнительно предположить, что процессы имеют только положительные скачки, то в (2) для отрицательных s $\lambda_s(I)=0$, и

$$Me^{iuY(I)} = e^{\sum\limits_{s=1}^{\infty} \lambda_s(I)\,(e^{ius}-1)}.$$

В этом случае имеются более простые необходимые и достаточные условия сходимости, поэтому сначала мы сформулируем результаты для этого случая. Определим следующие условия.

A$_1$. Для любых непересекающихся интервалов I_1 и I_2

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} P\left(X_{nk}(I_1)\neq 0,\ X_{nk}(I_2)\neq 0\right)=0.$$

A$_2$. Для произвольного интервала I выполняется, что если J_{nk} обозначает нижнюю грань интервалов, содержащих все скачки процесса $X_{nk}(t)$, лежащие в интервале I, то при любом $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} P(|J_{nk}|>\varepsilon)=0,$$

где $|J|$ обозначает длину интервала J.

A_3. Для любых интервала I и числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\max_{1\le k\le k_n} |J_{nk}| > \varepsilon) = 0,$$

где J_{nk} определяется так же, как в условии A_2.

B. При любых I и $s \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} P\left(X_{nk}(I) = s\right) = \lambda_s(I) < \infty.$$

Теорема 1. *Если $\{X_{nk}(t)\}$ схема серий независимых, бесконечно малых процессов, имеющих лишь положительные скачки, то для того, чтобы процессы $Y_n(t)$ слабо сходились к сложному пуассоновскому процессу $Y(t)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись любое из условий* A_1, A_2 *или* A_3 *и условие* B (*для* $s > 0$). *В случае сходимости характеристическая функция случайной величины $Y(t)$ имеет вид* (2).

Теорема 2. *Если $\{X_{nk}(t)\}$ схема серий независимых, бесконечно малых процессов, имеющих лишь положительные скачки, и процессы $Y_n(t)$ слабо сходятся к некоторому процессу $Y(t)$, то необходимым и достаточным условием того, чтобы предельный процесс был сложным пуассоновским вида* (2), *является условие* B (*для* $s > 0$) *с дополнением, что при любом s функция интервалов $\lambda_s(I)$ аддитивна.*

Прежде чем высказать теорему для общего случая, определим еще условие.

A_4. Для любого интервала I и произвольного числа $\varepsilon > 0$ существуют процессы $Z_{nk}^{(\varepsilon)}(t)$ такие, что при произвольных n и k скачки процесса $Z_{nk}^{(\varepsilon)}(t)$ содержатся в интервале длины ε, и если

$$X_{nk}^{(\varepsilon)}(t) = X_{nk}(t) - Z_{nk}^{(\varepsilon)}(t),$$

то для любого интервала $J \subset I$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} P\left(X_{nk}^{(\varepsilon)}(J) \neq 0\right) = 0.$$

Теорема 3. *Если $\{X_{nk}(t)\}$ схема серий независимых, бесконечно малых процессов, то необходимыми и достаточными условиями сходимости процессов $Y_n(t)$ к сложному пуассоновскому процессу $Y(t)$, являются одно из условий* A_1 *или* A_4 *и условие* B. *В случае сходимости характеристическая функция случайной величины $Y(I)$ имеет вид* (2).

2. Доказательство теорем

Пусть при каждом n независимые случайные векторы

$$\xi_{nk} = (\xi_{nk}^{(1)}, \ldots, \xi_{nk}^{(r)}) \in E^r \qquad (1 \le k \le k_n)$$

таковы, что случайные величины $\xi_{nk}^{(i)}$ принимают лишь целые значения. Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le k_n} P(\xi_{nk} \neq \mathbf{0}) = 0$$

и обозначим

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk} .$$

Лемма 1. *Для того, чтобы распределения векторов η_n при $n \to \infty$ слабо сходились к предельному распределению $F(\mathbf{x})$ в E^r, необходимо и достаточно, чтобы*

(*i*) *для любого вектора* $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ *с целыми компонентами*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} P(\xi_{nk} = \mathbf{s}) = \lambda_{\mathbf{s}}$$

и (*ii*)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\mathbf{s}\neq 0} \left| \sum_{k=1}^{kn} P(\xi_{nk} = \mathbf{s}) - \lambda_{\mathbf{s}} \right| = 0.$$

При этом

$$\int_{E^r} e^{i(\mathbf{u},\, \mathbf{x})}\, dF(\mathbf{x}) = \exp\left[\sum_{\mathbf{s}\neq 0} \lambda_{\mathbf{s}} \left(e^{i(\mathbf{u},\, \mathbf{s})} - 1\right)\right].$$

Доказательство леммы можно провести так же, как доказана теорема о сходимости к пуассоновскому закону (см. [7] § 26).

Обозначим i-тый единичный вектор в E^r через $\mathbf{e}_i$ и пусть

$$B_{nk} = \bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant r} \{\xi_{nk}^{(i)} \neq 0,\ \xi_{nk}^{(j)} \neq 0\}.$$

Лемма 2. *Для того, чтобы распределение векторов η_n сходилось к предельному с независимыми компонентами, необходимо, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} P(B_{nk}) = 0 \tag{3}$$

и достаточно, чтобы выполнились (3) *и при любом* $s_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} P(\xi_{nk} = s_i\, \mathbf{e}_i) = \lambda_{s_i\, \mathbf{e}_i} .$$

Доказательство. Легко видеть, что компоненты распределения, имеющего характеристическую функцию вида (2), независимы тогда и только тогда, когда $\lambda_{\mathbf{s}}$ обращается в нуль всегда, если больше чем один компонент вектора $\mathbf{s}$ отличается от нуля. Это замечание вместе с леммой 1 докажет лемму 2.

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$A_{nk} = \bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant r} \{X_{nk}(I_i) \neq 0,\ X_{nk}(I_j) \neq 0\},$$

где $I_1, \ldots, I_r$ – интервалы. Легко видеть, что условие A_1 равносильно следующему условию: при любых непересекающихся $I_1, \ldots, I_r$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} P(A_{nk}) = 0.$$

Таким образом, то, что условия A_1 и B необходимы и достаточны, сразу следует из леммы 2. Докажем, что условия A_1, A_2 и A_3 равносильны.

Пусть I любой интервал и $\varepsilon>0$. Разделим I на непересекающиеся интервалы $I_1, \ldots, I_r$, длины которых не превосходят $\frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда

$$P(|J_{nk}|\geqslant\varepsilon)\leqslant P(A_{nk}),$$

значит, A_2 следует из A_1.

Пусть $I_1, \ldots, I_r$ – непересекающиеся интервалы, которые не соприкасаются, и I интервал, содержащий все интервалы $I_1, \ldots, I_r$. Если $\varepsilon(>0)$ меньше, чем расстояния между интервалами $I_1, \ldots, I_r$, то

$$P(A_{nk})\leqslant P(|J_{nk}|\geqslant\varepsilon),$$

поэтому A_1 следует из A_2.

Эквивалентность условий A_2 и A_3 вытекает из неравенства

$$1-e^{-\sum\limits_{k=1}^{k_n} P(|J_{nk}|\geqslant\varepsilon)}\leqslant P(\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|J_{nk}|\geqslant\varepsilon)\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}P(|J_{nk}|\geqslant\varepsilon).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Необходимость дополнительного условия очевидна. Докажем достаточность. Пусть $I_1, \ldots, I_r$ – непересекающиеся интервалы такие, что $\bigcup\limits_{i=1}^{r} I_i=I$, где I – интервал.

На основании леммы 1 следует, что предельное распределение вектора $\left(Y_n(I_1), \ldots, Y_n(I_r)\right)$ имеет характеристическую функцию

$$\exp\left[\sum_{\substack{s_1,\ldots,s_r=0\\(s_1,\ldots,s_r)\neq 0}}^{\infty}\lambda_{s_1,\ldots,s_r}\left(e^{i\sum\limits_{l=1}^{r}u_l s_l}-1\right)\right].$$

Легко видеть, что при $1\leqslant i\leqslant r$, $s>0$

$$\lambda_s(I_i)=\sum_{s_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{s_{i-1}=0}^{\infty}\sum_{s_{i+1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{s_r=0}^{\infty}\lambda_{s_1,\ldots,s_{i-1},s,s_{i+1},\ldots,s_r}.$$

Аддитивность функции $\lambda_s(I)$ равносильна равенствам

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_s(I_i)=\sum_{s_1+\ldots+s_r=s}\lambda_{s_1,\ldots,s_r}.$$

С заменой $s=1$ получается, что все $\lambda_{s_1,\ldots,s_r}$, где по крайней мере два из $s_1, \ldots, s_r$ отличаются от нуля и одно из них равно 1, обращаются в нуль. Заменим последовательно $s=2, 3, \ldots$ Получается, что все числа $\lambda_{s_1,\ldots,s_r}$, где по крайней мере два из $s_1, \ldots, s_r$ отличаются от нуля, равны 0, значит компоненты предельного распределения векторов $\left(Y_n(I_1), \ldots, Y_n(I_r)\right)$ независимы, предельный процесс является сложным пуассоновским.

Доказательство теоремы 3. Необходимость и достаточность условий A_1 и B следует из лемм. Остается доказать, что условия A_1 и A_4 равносильны.

Разделим интервал I на непересекающиеся интервалы $I_1, \ldots, I_r$, длины которых не превосходят ε. При фиксированных n и k определим события

$$C_1 = \{ X_{nk}(I_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, r \},$$

$$C_2 = \{ X_{nk}(I_i) \neq 0 \text{ точно для одного индекса } i \},$$

$$C_3 = \{ X_{nk}(I_i) \neq 0 \text{ для двух или больше индексов } i \}.$$

При условии C_1 или C_3 пусть $Z_{nk}^{(\varepsilon)}(t) \equiv 0$. При условии C_2 существует один интервал I_i, для которого $X_{nk}(I_i) \neq 0$. При этом $Z_{nk}^{(\varepsilon)}(t)$ определяется так, что для $J \subset I_i$

$$Z_{nk}^{(\varepsilon)}(J) = X_{nk}(J)$$

и для $J \cap I_i = 0$

$$Z_{nk}^{(\varepsilon)}(J) = 0.$$

Пусть $J \subset I$. Предположим, что конечные точки интервала J попадают на интервалы I_{i_1} и I_{i_2} $(i_1 < i_2)$, и разделяют эти интервалы на подынтервалы I'_{i_1}, I''_{i_1} и I'_{i_2}, I''_{i_2}. Если конечные точки интервала J попадают на тот же самый интервал I_i, то доказательство можно провести аналогичным образом. Ясно, что

$$P\left(X_{nk}^{(\varepsilon)}(J) \neq 0\right) = \sum_{l=1}^{3} P\left(X_{nk}^{(\varepsilon)}(J) \neq 0, C_l\right). \tag{4}$$

Теперь

$$P\left(X_{nk}^{(\varepsilon)}(J) \neq 0, C_1\right) = P\left(X_{nk}(J) \neq 0, C_1\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(X_{nk}(I'_{i_1}) \neq 0, X_{nk}(I''_{i_1}) \neq 0\right) + P\left(X_{nk}(I'_{i_2}) \neq 0, X_{nk}(I''_{i_2}) \neq 0\right) \tag{5}$$

и

$$P\left(X_{nk}^{(\varepsilon)}(J) \neq 0, C_3\right) = P\left(X_{nk}(J) \neq 0, C_3\right) \leqslant P(C_3) \leqslant P(A_{nk}). \tag{6}$$

Наконец,

$$P\left(X_{nk}^{(\varepsilon)}(J) \neq 0, C_2\right) \leqslant \sum_{i \neq i_1} P\left(X_{nk}(I_i) \neq 0, X_{nk}(I''_{i_1}) \neq 0\right) +$$

$$+ \sum_{i \neq i_2} P\left(X_{nk}(I_i) \neq 0, X_{nk}(I'_{i_2}) \neq 0\right). \tag{7}$$

Из (4), (5), (6) и (7) следует, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} P\left(X_{nk}^{(\varepsilon)}(J) \neq 0\right) \leqslant \sum_{k=1}^{k_n} \Big\{ P\left(X_{nk}(I'_{i_1}) \neq 0, X_{nk}(I''_{i_1}) \neq 0\right) +$$

$$+ P\left(X_{nk}(I'_{i_2}) \neq 0, X_{nk}(I''_{i_2}) \neq 0\right) + P(A_{nk}) +$$

$$+ \sum_{i \neq i_1} P\left(X_{nk}(I_i) \neq 0, X_{nk}(I''_{i_1}) \neq 0\right) +$$

$$+ \sum_{i \neq i_2} P\left(X_{nk}(I_i) \neq 0, X_{nk}(I'_{i_2}) \neq 0\right) \Big\},$$

откуда вытекает, что из условия A_1 следует условие A_4. Докажем обратное утверждение.

Пусть $I_1, \ldots, I_r$ – непересекающиеся интервалы, которые не соприкасаются, и пусть ε меньше, чем любое расстояние между ними. Выберем I так, чтобы $\bigcup_{i=1}^{r} I_i \subset I$. Определим $X_{nk}^{(\varepsilon)}(t)$ в соответствии условию A_4. Тогда

$$P(A_{nk}) \leqslant P\left(\bigcup_{i=1}^{r} \{X_{nk}^{(\varepsilon)}(I_i) \neq 0\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} P\left(X_{nk}^{(\varepsilon)}(I_i) \neq 0\right)$$

и

$$\sum_{k=1}^{k_n} P(A_{nk}) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{k_n} P_{.}\left(X_{nk}^{(\varepsilon)}(I_i) \neq 0\right).$$

Значит условие A_1 является следствием условия A_4. Теорема доказана.

В заключение хотелось бы выразить благодарность Б. В. Гнеденко за постановку задачи и обсуждение результатов.

Будапешт

Поступило в редакцию
29.I.1971

Литература

1. А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания, М., 1963.
2. Г. А. Ососков. Одна предельная теорема для потоков однородных событий, Теория вероятностей и ее прим., **1**, № 2 (1956), 274–282.
3. Б. И. Григелионис, О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому, Теория вероятностей и ее прим, **8**, № 2 (1963) 189–194.
4. Б. И. Григелионис, К вопросу о сходимости сумм ступенчатых процессов к пуассоновскому, Лит. матем. сб., VI, **2** (1966), 241–244.
5. P. M. Lee, Infinitely divisible stochastic processes, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstcheorie und ihre Anw. 7 (1967), 147.
6. D. Sza'sz, W. A. Woyczyński, Poissonian random measures and linear processes with independent increments, Bull. de l'Academie Polonaises des Sciences, **18**, № 8 (1970), 475–482.
7. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., 1949.

APIE NEPRIKLAUSOMŲ, ĮGYJANČIŲ SVEIKAS REIKŠMES, PROCESŲ SUMŲ KONVERGAVIMĄ

D. Saasas

(*Reziumė*)

Sakykime, $\{X_{nk}(t) : 1 \leqslant k \leqslant k_n, n=1,2, \ldots\}$ yra nepriklausomų, be galo mažų, įgyjančių sveikas reikšmes, procesų serijų schema ir

$$Y_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}(t).$$

3 teoremoje nurodomos būtinos ir pakankamos procesų $Y_n(t)$ konvergavimo į sudėtinį Puasono procesą sąlygos, t.y. į procesą su nepriklausomais prieaugliais, įgyjantį sveikas reikšmes. Jeigu rocesas turi tik teigiamus šuolius, tai sąlygos yra žymiai paprastesnės (žr. 1 ir 2 teoremas).

ON THE CONVERGENCE OF THE SUMS OF INDEPENDENT, INTEGER-VALUED PROCESSES

D. Szász

(*Summary*)

Let $\{X_{nk}(t) : 1 \leqq k \leqq k_n, n=1, 2, \ldots\}$ a triangular array of asymptotically negligible, independent, integer-valued processes, and

$$Y_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}(t)$$

In THEOREM 3 necessary and sufficient conditions are given for the convergence of the processes $Y_n(t)$ to a composed Poisson process (i. e. to an integer-valued process with independent increments). If the processes have only positive jumps, then the conditions are simpler (see Theorems 1 and 2).