1972

УДК 511

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ИСПОРЧЕННОЙ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

В. А. Калинка, Л. П. Постникова

Настоящая работа относится к теории почти периодических функций натурального аргумента. Под испорченной функцией Эйлера будем понимать функцию, определенную равенством

$$I(n)=\sum_{d/n}\frac{\mu(d)}{d+1}.$$

Функция $I(n)$ не является мультипликативной и не представляется возможным применить для ее изучения мощные методы теории мультипликативных функций. Однако метод, развитый Е. В. Новоселовым ([1] и [3], стр. 213–215) и продолженный в работе И. Ильясова [2], можно приложить к этому вопросу.

Замечание. Функция $I(n)$ ограничена.

В самом деле,

$$\left|I(n)-\frac{\varphi(n)}{n}\right|<\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d(d+1)}=1,$$

и, следовательно, $-1<I(n)<2$.

Теорема 1. *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[-1, 2]$. Существует такое число $A(F)$, что*

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}F\Big(I(n)\Big)=A(F)+O\left(\frac{1}{\ln N}\right).$$

Доказательство. Обозначим через T_N общее наименьшее кратное чисел $1, 2, \ldots [(1-\beta)\ln N]$, где β фиксировано, $0<\beta<1$. Поскольку

$$\ln T_N=\sum_{n=1}^{[(1-\beta)\ln N]}\Lambda(n),$$

то по асимптотическому закону распределения простых чисел

$$T_N\leqslant N^{\left(1-\beta\right)\left(1+o(1)\right)}.$$

Разделим N на T_N с остатком $N=R_N+\Theta T_N$, $0\leqslant\Theta<1$. Далее обозначим через $R_N(m)$ положительный остаток от деления положительного числа m на

R_N, т.е. $1 \leqslant R_N(m) \leqslant R_N$. Положим $f(m)=F(I(m))$ и $M=\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 2}|F(x)|$. Получаем

$$\left|\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m)-\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m)\right|=\left|\left(1-\frac{R_N}{N}\right)\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{N}\sum_{m=R_N+1}^{N} f(m)\right|\leqslant\left(1-\frac{R_N}{N}\right)M+\frac{1}{N}(N-R_N)M\leqslant\frac{M}{N^{\beta+o(1)}}.$$

Поскольку функция $f\Big(R_N(m)\Big)$ периодическая с периодом R_N, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T} f\Big(R_N(m)\Big)=\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m).$$

По предположению $|F(x_1)-F(x_2)|\leqslant c|x_1-x_2|$, поэтому

$$\left|\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m)-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T} f(m)\right|=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}|f(R_N(m)-f(m)|\leqslant\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{c}{T}\sum_{m=1}^{T}|I(R_N(m)-$$

$$-I(m)|\leqslant\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{c}{T}\sum_{m=1}^{T}\left|\sum_{d/R_N(m)}\frac{\mu(d)}{d+1}-\sum_{d/m}\frac{\mu(d)}{d+1}\right|.$$

Поскольку R_N делится на T_N, которое в свою очередь делится на все натуральные числа n $1\leqslant n\leqslant(1-\beta)\ln N$, то делители, не превосходящие $(1-\beta)\ln N$, у m и $R_N(m)$ одинаковы. Получаем

$$\left|\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m)-\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T} f(m)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{c}{T}\sum_{m=1}^{T}\left|\sum_{\substack{d/R_N(m)\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{\mu(d)}{d+1}-\sum_{\substack{d/m\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{\mu(d)}{d+1}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{c}{T}\sum_{m=1}^{T}\sum_{\substack{d/R_N(m)\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d+1}+\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{c}{T}\sum_{m=1}^{T}\sum_{\substack{d/m\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d+1}.$$

Это дает

$$\left|\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m)-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T} f(m)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{c}{T}\sum_{d>(1-\beta)\ln N}^{T}\frac{1}{d+1}\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant T\\ m=xd+yR_N\\ 1\leqslant xd\leqslant R_N}}1+\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{c}{T}\sum_{d>(1-\beta)\ln N}\times$$

$$\times \frac{1}{d+1}\left[\frac{T}{d}\right] \leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{c}{T} \sum_{d>(1-\beta)\ln N}^{T} \frac{1}{d+1} \sum_{x=1}^{[R_N/d]} \left(\left[\frac{T-xd}{R_N}\right]+1\right)+$$

$$+c \sum_{d>(1-\beta)\ln N} \frac{1}{d^2} = O\left(\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \sum_{d>(1-\beta)\ln N}^{T} \frac{1}{d+1} \sum_{x=1}^{[R_N/d]} \frac{T-xd}{R_N}\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{\ln N}\right) = O\left(\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \sum_{d>(1-\beta)\ln N}^{T} \frac{1}{(d+1)R_N} \frac{T+T-d[R_N/d]}{2}\left[\frac{R_N}{d}\right]\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{\ln N}\right) = O\left(\overline{\lim_{T\to\infty}} \sum_{d>(1-\beta)\ln N}^{T} \frac{1}{d(d+1)}\right)+O\left(\frac{1}{\ln N}\right)=O\left(\frac{1}{\ln N}\right).$$

Теорема 2. *Пусть функция вещественного переменного $F(x)$ такая, что ее производная на отрезке $[-1, 2]$ удовлетворяет условию Липшица первого порядка. Тогда*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F\big(I(n)\big) = A(F) + O\left(\frac{\ln\ln N}{\ln^2 N}\right).$$

Доказательство начнем со следующей леммы.

Лемма. *Пусть L — натуральное число, m-целое $0 \leqslant m \leqslant L-1$. Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\equiv m \pmod L}}^{T} I(k) = \frac{B_L(m)}{L} T + O(\ln T)$$

с абсолютной постоянной в символе „O". Здесь

$$B_L(m) = \sum_{\tau/(m,L)} \mu(\tau) \sum_{\substack{l=1\\ (l,L)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l(l\tau+1)}.$$

Получаем

$$\sum_{\substack{k\equiv m \pmod L\\ k\leqslant N}} I(k) = \sum_{\substack{k\equiv m \pmod L\\ k\leqslant N}} \sum_{d/k} \frac{\mu(d)}{d(d+1)} =$$

$$= \sum_{d\leqslant N} \frac{\mu(d)}{d+1} \sum_{\substack{xd\equiv m \pmod L\\ x\leqslant N/d}} 1 = \sum_{\tau/L} \sum_{\substack{(d,L)=\tau\\ d\leqslant N}} \frac{\mu(d)}{d+1} \sum_{\substack{xd\equiv m \pmod L\\ x\leqslant N/d}} 1.$$

Внутренняя сумма будет не пустой, если $\tau \mid (m, L)$. Итак,

$$\sum_{\substack{k\equiv m \pmod L\\ k\leqslant N}} I(k) = \sum_{\tau/(m,L)} \sum_{\substack{(d,L)=\tau\\ d\leqslant N}} \frac{\mu(d)}{d+1} \sum_{\frac{d}{\tau} x \equiv \frac{m}{\tau} \left(\mathrm{mod}\ \frac{L}{\tau}\right)} 1 =$$

$$= \sum_{\tau \mid (m,L)} \sum_{\substack{(d,L)=\tau\\ d\leqslant N}} \frac{\mu(d)}{d+1} \sum_{\substack{x\equiv x_0 \pmod{L/\tau}\\ x\leqslant N/d}} 1 =$$

$$= \sum_{\tau \mid (m, L)} \sum_{\substack{(d, L)=\tau \\ d \leqslant N}} \frac{\mu(d)}{d+1} \left(\frac{N\tau}{Ld} + O(1) \right) =$$

$$= \frac{N}{L} \sum_{\tau \mid (m, L)} \sum_{\substack{(l, L/\tau)=1 \\ l \leqslant N/\tau}} \frac{\mu(\tau l)}{l(\tau l+1)} + O(\ln N).$$

Если $(l, \tau) > 1$, то $\mu(\tau l)=0$, поэтому в последнюю сумму можно включить условие $(l, \tau)=1$. При включении этого условия $\mu(l\tau)=\mu(l)\ \mu(\tau)$. Далее два условия $(l, \tau)=1$ и $(l, L/\tau)=1$ можно заменить одним $(l, L)=1$. Итак,

$$\sum_{\substack{k \equiv m \pmod L \\ k \leqslant N}} I(k) = \frac{N}{L} \sum_{\tau \backslash (m, L)} \mu(\tau) \sum_{\substack{(l, L)=1 \\ l \leqslant N/\tau}} \frac{\mu(l)}{l(\tau l+1)} + O(\ln N).$$

Очевидно, что

$$\sum_{\substack{l \leqslant N \backslash \tau \\ (l, L)=1}} \frac{\mu(l)}{l(\tau l+1)} = \sum_{\substack{l=1 \\ (l, L)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l(\tau l+1)} + O\left(\sum_{l \geqslant N/\tau} \frac{1}{l(\tau l+1)} \right) =$$

$$= \sum_{\substack{l=1 \\ (l, L)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l(\tau l+1)} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Это дает

$$\sum_{\substack{k \equiv m \pmod L \\ k \leqslant N}} I(k) = \frac{N}{L} \sum_{\tau \mid (m, L)} \mu(\tau) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, L)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l(\tau l+1)} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{L} \sum_{\tau/(m, L)} |\mu(\tau)| \right) + O(\ln N) = \frac{N}{L} \sum_{\tau \mid (m, L)} \mu(\tau) \times$$

$$\times \sum_{\substack{l=1 \\ (l, L)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l(\tau l+1)} + O(\ln N),$$

и лемма доказана.

Докажем теорему 2. Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. По теореме о среднем Лагранжа

$$F(x_1) - F(x_2) = (x_1 - x_2) F'(\Theta), \qquad x_1 \leqslant \Theta \leqslant x_2$$

и, следовательно,

$$F(x_1) - F(x_2) = (x_1 - x_2) F'(x_2) + (x_1 - x_2) \left(F'(\Theta) - F'(x_2) \right).$$

Отсюда получаем

$$F(x_1) - F(x_2) = (x_1 - x_2) F'(x_2) + O(|x_1 - x_2|^2). \tag{1}$$

Как и в теореме 1, вводим величины T_N, R_N и таким же образом получаем

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} F\left(I(m)\right) = \frac{1}{R_N} \sum_{m=1}^{R_N} F\left(I(m)\right) + O\left(\frac{1}{N^{\beta + o(1)}}\right).$$

Так как

$$A(F)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}F\big(I(m)\big),$$

то

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}F\big(I(m)-A(F)\big)=$$

$$=\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N}F\big(I(m)\big)-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}F\big(I(m)\big)+O\left(\frac{1}{N^{\beta+o(1)}}\right).$$

При $1\leqslant m\leqslant R_N$ $I\big(R_N(m)\big)=I(m)$. Функция $I\big(R_N(m)\big)$ периодична с периодом R_N. Поэтому

$$\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N}F\big(I(m)\big)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}F\Big(I\big(R_N(m)\big)\Big)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}F\big(I(m)\big)-A(F)=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}\Big(F\Big(I\big(R_N(m)\big)\Big)-F\big(I(m)\big)\Big)+O\left(\frac{1}{N^{\beta+o(1)}}\right). \tag{2}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}\Big(I\big(R_N(m)-I(m)\big)F'\Big(I\big(R_N(m)\big)\Big)\Big)=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}I\big(R_N(m)\big)F'\Big(I\big(R_N(m)\big)\Big)-$$

$$-\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}I(m)F'\Big(I\big(R_N(m)\big)\Big).$$

В силу периодичности суммируемого выражения имеем

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}I\big(R_N(m)\big)F'\Big(I\big(R_N(m)\big)\Big)=\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N}I(m)F'\big(I(m)\big).$$

Далее

$$\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}I(m)F'\Big(I\big(R_N(m)\big)\Big)=$$

$$=\sum_{m=1}^{R_N}F'\big(I(m)\big)\frac{1}{T}\sum_{\substack{k=1\\ k\equiv m\ (\mathrm{mod}\ R_N)}}^{T}I(k)+O\left(\frac{R_N}{T}\right).$$

Однако в лемме мы констатировали существование предела

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv m \pmod{R_N}}}^{T} I(k) = \frac{B_{R_N}(m)}{R_N}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} F\Big(I(m)\Big) - A(F) = \frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} F'\Big(I(m)\Big)\Big(I(m) - B_{R_N}(m)\Big) +$$

$$+ O\left(\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}\Big(I\Big(R_N(m)\Big) - I(m)\Big)^2\right) + O\left(\frac{1}{N^{\beta+o(1)}}\right). \qquad (3)$$

Для дальнейшего важно заметить, что

$$\frac{I(k) - B_{R_N}(k)}{R_N} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{\substack{s=1 \\ s\equiv k \pmod{R_N}}}^{T}\Big(I(s) - I(k)\Big).$$

Чтобы исследовать выражение

$$\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N} F'\Big(I(k)\Big)\Big(I(k) - B_{R_N}(k)\Big),$$

разобьем эту сумму по прогрессиям с разностью $\overline{R_N}$, где $T_N \backslash \overline{R}_N \backslash R_N$. Через $\overline{R}_N(k)$ обозначим остаток от деления числа k на $\overline{R}_N$. Получаем

$$\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N} F'\Big(I(k)\Big)\Big(I(k) - B_{R_N}(k)\Big) =$$

$$= \frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N} F'\Big(I\Big(\overline{R}_N(k)\Big)\Big)\Big(I(k) - B_{R_N}(k)\Big) +$$

$$+ \frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Big(F'\Big(I(k)\Big) - F'\Big(I\Big(\overline{R}_N(k)\Big)\Big)\Big)\Big(I(k) - B_{R_N}(k)\Big).$$

Отсюда

$$\left|\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N} F'\Big(I(k)\Big)\Big(I(k) - B_{R_N}(k)\Big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N} F'\Big(I\Big(\overline{R}_N(k)\Big)\Big)\Big(I(k) - B_{R_N}(k)\Big)\right| +$$

$$+ \frac{c}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\left| I(k) - I\Big(\overline{R}_N(k)\Big)\right| \left| I(k) - B_{R_N}(k)\right|. \qquad (4)$$

Получаем

$$\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N} F'\left(I\left(\bar{R}_N(k)\right)\right)\left(I(k)-B_{R_N}(k)\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\bar{R}_N} F'\left(I(m)\right)\frac{1}{R_N}\sum_{\substack{k=1\\ k\equiv m \pmod{\bar{R}_N}}}^{R_N}\left(I(k)-B_{R_N}(k)\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\bar{R}_N} F'\left(I(m)\right)\sum_{\substack{k=1\\ k\equiv m \pmod{\bar{R}_N}}}^{R_N}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{\substack{s=1\\ s\equiv k \pmod{R_N}}}^{T}\left(I(s)-I(k)\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\bar{R}_N} F'\left(I(m)\right)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{k\equiv m \pmod{\bar{R}_N}}^{R_N}\sum_{\substack{s=1\\ s\equiv k \pmod{R_N}}}\left(I(s)-I(k)\right).$$

Выберем члены подпоследовательности T кратными R_N, тогда получаем

$$\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N} F'\left(I\left(\bar{R}_N(k)\right)\right)\left(I(k)-B_{R_N}(k)\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\bar{R}_N} F'\left(I(m)\right)\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{s=m \pmod{\bar{R}_N}}^{T} I(s)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{R_N}\sum_{k\equiv m \pmod{\bar{R}_N}}^{R_N} I(k)\right)=\sum_{m=1}^{\bar{R}_N} F'\left(I(m)\right)\left(\frac{B\bar{R}_N(m)}{\bar{R}_N}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{R_N}\sum_{k\equiv m \pmod{\bar{R}_N}}^{R_N} I(k)\right).$$

По лемме

$$\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N} F'\left(I\left(\bar{R}_N(k)\right)\right)\left(I(k)-B_{R_N}(k)\right)=$$

$$=O\left(\sum_{m=1}^{\bar{R}_N}\frac{\ln R_N}{R_N}\right)=O\left(\frac{\bar{R}_N}{R_N}\ln R_N\right).$$

Так как $R_N\asymp N$, то

$$\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N} F'\left(I\left(\bar{R}_N(k)\right)\right)\left(I(k)-B_{R_N}(k)\right)=$$

$$=O\left(\frac{\ln N}{N}\bar{R}_N\right).$$

Так как $R_N \geqslant \tilde{\bar{R}}_N \geqslant T_N \asymp N^{1-\beta+o(1)}$, то для получения требуемого понижения, следует взять $\bar{R}_N = T_N Q_N$, где $Q_N = [N^{\beta/2}]$. Тогда $\bar{R}_N \asymp N^{1-\beta/2+o(1)}$ и получаем

$$\frac{1}{R_N} \sum_{k=1}^{R_N} F'\left(I\left(\bar{R}_N(k)\right)\right)\left(I(k) - B_{R_N}(k)\right) = O\left(\frac{\ln N}{N^{\beta/2+o(1)}}\right).$$

Обратимся теперь к оценке выражения

$$\frac{1}{R_N} \sum_{k=1}^{R_N} |\, I(k) - B_{R_N}(k)\,| \left| I(k) - I\left(\bar{R}_N(k)\right)\right|.$$

По определению

$$|\, I(k) - B_{R_N}(k)\,| = \Bigg| \sum_{d \mid k} \frac{\mu(d)}{d+1} -$$

$$- \sum_{d \mid (k, R_N)} \mu(d) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, R_N)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l(ld+1)} \Bigg|.$$

Поскольку R_N делится на T_N, которое в свою очередь делится на все натуральные числа n $1 \leqslant n \leqslant (1-\beta) \ln N$, то делители, не превосходящие $(1-\beta) \times$ $\times \ln N$, у k и R_N одинаковые. Можно написать неравенство

$$|\, I(k) - B_{R_N}(k)\,| \leqslant \Bigg| \sum_{\substack{d < (1-\beta) \ln N \\ d \mid k}} \left(\frac{\mu(d)}{d+1} - \mu(d) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, R_N)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l(ld+1)}\right)\Bigg| +$$

$$+ \sum_{\substack{d > (1-\beta) \ln N \\ d \backslash k}} \frac{1}{d} + \sum_{\substack{d > (1-\beta) \ln N \\ d \backslash k}} \frac{1}{d} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{d < (1-\beta) \ln N \\ d \backslash k}} \left| \frac{\mu(d)}{d+1} - \mu(d) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, R_N)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l(ld+1)} \right| + O\left(\sum_{\substack{d > (1-\beta) \ln N \\ d \backslash k}} \frac{1}{d}\right).$$

В каждом слагаемом первой суммы правой части неравенства выделим слагаемое с $l = 1$. После сокращения в сумме

$$\sum_{(l, R_N)=1} \frac{\mu(l)}{l(ld+1)}$$

останутся слагаемые с l, большими $(1-\beta)$ $ln\ N$; получаем

$$|\, I(k) - B_{R_N}(k)\,| \leqslant \sum_{\substack{d < (1-\beta) \ln N \\ d \backslash k}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{l=1 \\ l > (1-\beta) \ln N}}^{\infty} \frac{1}{l^2} +$$

$$+ c \sum_{\substack{d > (1-\beta) \ln N \\ d \backslash k}} \frac{1}{d} = O\left(\frac{1}{\ln N} \sum_{\substack{d < (1-\beta) \ln N \\ d \backslash k}} \frac{1}{d}\right) + O\left(\sum_{\substack{d > (1-\beta) \ln N \\ d \backslash k}} \frac{1}{d}\right).$$

Далее

$$|I(k)-I\left(\bar R_N(k)\right)|=\Big|\sum_{d\backslash k}\frac{\mu(d)}{d+1}-\sum_{d\backslash R_N(k)}\frac{\mu(d)}{d+1}\Big|.$$

Поскольку $\bar R_N$ делится на T_N, которое в свою очередь делится на все числа, не превосходящие $(1-\beta)\ln N$, то делители, не превосходящие $(1-\beta)\ln N$, у k и $\bar R_N(k)$ одинаковые и мы получаем

$$|I(k)-I\left(\bar R_N(k)\right)|=\Big|\sum_{d\backslash k}\frac{\mu(d)}{d+1}-$$

$$-\sum_{d\backslash \bar R_N(k)}\frac{\mu(d)}{d+1}\Big|\leqslant\sum_{\substack{d\backslash k\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}+\sum_{\substack{d\backslash \bar R_N(k)\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}.$$

На основании этих неравенств получаем

$$\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}|I(k)-B_{R_N}(k)|\,|I(k)-I(\bar R_N(k)|=$$

$$=O\Bigg(\frac{1}{\ln N}\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Big(\sum_{\substack{d\backslash k\\ d<(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Big)\Big(\sum_{\substack{d\backslash k\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}+$$

$$+\sum_{\substack{d\backslash \bar R_N(k)\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Big)\Bigg)+O\Bigg(\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Big(\sum_{\substack{d\backslash k\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Big)^2\Bigg)+$$

$$+O\Bigg(\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Big(\sum_{\substack{d\backslash k\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Big)\Big(\sum_{\substack{d\backslash \bar R_N(k)\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Big)\Bigg)=$$

$$=O\Bigg(\frac{1}{\ln N}\sqrt{\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Big(\sum_{d\backslash k}\frac{1}{d}\Big)^2}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Big(\sum_{\substack{d\backslash k\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Big)^2+\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Big(\sum_{\substack{d\backslash \bar R_N(k)\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Big)^2}\Bigg)+$$

$$+O\Bigg(\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Big(\sum_{\substack{d\backslash k\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Big)^2\Bigg)+O\Bigg(\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Big(\sum_{\substack{d\backslash \bar R_N(k)\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Big)^2\Bigg).$$

Далее

$$\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Big(\sum_{d\backslash k}\frac{1}{d}\Big)^2=\frac{1}{R_N}\sum_{d=1}^{R_N}\frac{1}{d}\sum_{\substack{d=1\\ k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)}}^{R_N}\frac{\sigma(k)}{k}=$$

$$= \frac{1}{R_N} \sum_{d=1}^{R_N} \frac{1}{d} \sum_{l \leqslant \frac{R_N}{d}} \frac{\sigma(ld)}{ld} \leqslant \frac{1}{R_N} \sum_{d=1}^{R_N} \frac{\sigma(d)}{d^2} \sum_{l \leqslant \frac{R_N}{d}} \frac{\sigma(l)}{l},$$

в силу очевидного неравенства

$$\frac{\sigma(ld)}{ld} \leqslant \frac{\sigma(l)}{l} \cdot \frac{\sigma(d)}{d}.$$

Так как

$$\sum_{l \leqslant T} \frac{\sigma(l)}{l} \leqslant \frac{\pi^2 T}{6},$$

то

$$\frac{1}{R_N} \sum_{k=1}^{R_N} \Big(\sum_{d \backslash k} \frac{1}{d} \Big)^2 = O\Big(\sum_{d=1}^{R_N} \frac{\sigma(d)}{d^3} \Big) = O(1)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{R_N} \sum_{k=1}^{R_N} | I(k) - B_{R_N}(k) | \; \Big| I(k) - I\big(\bar{R}_N(k)\big) \Big| =$$

$$= O\left(\frac{1}{\ln N} \sqrt{ \frac{1}{R_N} \sum_{k=1}^{R_N} \Big(\sum_{\substack{d \backslash k \\ d > (1-\beta)\ln N}} \frac{1}{d} \Big)^2 + \frac{1}{R_N} \sum_{k=1}^{R_N} \Big(\sum_{\substack{d \backslash \bar{R}_N(k) \\ d > (1-\beta)\ln N}} \frac{1}{d} \Big)^2 } \right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{R_N} \sum_{k=1}^{R_N} \Big(\sum_{\substack{d \backslash k \\ d > (1-\beta)\ln N}} \frac{1}{d} \Big)^2 \right) + O\left(\frac{1}{R_N} \sum_{k=1}^{R_N} \Big(\sum_{\substack{d \backslash \bar{R}_N(k) \\ d > (1-\beta)\ln N}} \frac{1}{d} \Big)^2 \right).$$

Напомним еще об одном члене из формулы (3)

$$\overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{T} \Big(I\big(R_N(m)\big) - I(m) \Big)^2.$$

Мы имеем

$$\frac{1}{T} \sum_{m=1}^{T} \Big(I\big(R_N(m)\big) - I(m) \Big)^2 = \frac{1}{T} \sum_{\substack{m=1 \\ k \equiv m \pmod{R_N} \\ k \leqslant T}}^{R_N} \big(I(k) - I(m) \big)^2.$$

у k и m делители, не превосходящие $(1-\beta)\ln N$, одинаковые и поэтому по определению $I(m)$

$$\frac{1}{T} \sum_{m=1}^{T} \Big(I(R_N(m)) - I(m) \Big)^2 \leqslant \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{R_N} \sum_{\substack{k \equiv m \pmod{R_N} \\ k \leqslant T}} \Big(\sum_{\substack{d \backslash k \\ d \geqslant (1-\beta)\ln N}} \frac{1}{d} \Big)^2 +$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{R_N}\sum_{\substack{k\equiv m \pmod{R_N}\\ k\leqslant T}}\Bigl(\sum_{\substack{d\geqslant(1-\beta)\ln N\\ d\backslash m}}\frac{1}{d}\Bigr)^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\Bigl(\sum_{\substack{d\geqslant(1-\beta)\ln N\\ d\backslash k}}\frac{1}{d}\Bigr)^2+\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N}\Bigl(\sum_{\substack{d\geqslant(1-\beta)\ln N\\ d\backslash k}}\frac{1}{d}\Bigr)^2.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}F\bigl(I(m)\bigr)-A(F)=$$

$$=O\left(\frac{1}{\ln N}\sqrt{\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Bigl(\sum_{\substack{d\backslash k\\ d\geqslant(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Bigr)^2+\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Bigl(\sum_{\substack{d\backslash \bar{R}_N(k)\\ d\geqslant(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Bigr)^2}\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Bigl(\sum_{\substack{d\backslash k\\ d\geqslant(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Bigr)^2\right)+O\left(\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Bigl(\sum_{\substack{d\backslash \bar{R}_N(k)\\ d\geqslant(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Bigr)^2\right)+$$

$$+O\left(\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\Bigl(\sum_{\substack{d\backslash k\\ d\geqslant(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Bigr)^2\right)+O\left(\frac{\ln N}{N^{\frac{\beta}{2}+o(1)}}\right).\qquad(5)$$

Теперь действуем по аналогии с работой [2]

$$\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Bigl(\sum_{\substack{d\backslash k\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Bigr)^2\leqslant\sum_{d_1>(1-\beta)\ln N}\frac{1}{d_1^2}\sum_{d_2>(1-\beta)\ln N}\frac{(d_1,\ d_2)}{d_2^2}.$$

Точно также

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\Bigl(\sum_{\substack{d\backslash k\\ d\geqslant(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Bigr)^2\leqslant\sum_{d_1>(1-\beta)\ln N}\frac{1}{d_1^2}\sum_{d_2>(1-\beta)\ln N}\frac{(d_1,\ d_2)}{d_2^2}.$$

Имеем

$$\sum_{d_2>(1-\beta)\ln N}\frac{(d_1,\ d_2)}{d_2^2}=\sum_{d\backslash d_1}d\sum_{\substack{(d_1\,d_2)=d\\ d_2>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d_2^2}=$$

$$=\sum_{d\backslash d_1}d\sum_{\substack{(f,\,d_1\backslash d)=1\\ f\geqslant\frac{(1-\beta)\ln N}{d}}}\frac{1}{(f\,d)^2}\leqslant\sum_{d\backslash d_1}\frac{1}{d}\sum_{f\geqslant\frac{(1-\beta)\ln N}{d}}\frac{1}{f^2}=O\left(\frac{\tau(d_1)}{\ln N}\right),$$

откуда

$$\sum_{d_1>(1-\beta)\ln N}\frac{1}{d_1^2}\sum_{d_2>(1-\beta)\ln N}\frac{(d_1\,d_2)}{d_2^2}=O\left(\frac{1}{\ln N}\sum_{d_1>(1-\beta)\ln N}\frac{\tau(d_1)}{d_1^2}\right).$$

Но

$$\sum_{d_1 > (1-\beta) \ln N} \frac{\tau(d_1)}{d_1^2} = O\left(\frac{\ln \ln N}{\ln N}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{R_N} \sum_{k=1}^{R_N} \Bigg(\sum_{\substack{d \backslash k \\ d > (1-\beta) \ln N}} \frac{1}{d} \Bigg)^2 = O\left(\frac{\ln \ln N}{\ln^2 N}\right),$$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} \Bigg(\sum_{\substack{d \backslash k \\ d > (1-\beta) \ln N}} \frac{1}{d} \Bigg)^2 = O\left(\frac{\ln \ln N}{\ln^2 N}\right).$$

Следующая по очереди оценка проводится так:

$$\frac{1}{R_N} \sum_{k=1}^{R_N} \Bigg(\sum_{\substack{d \backslash R_N(k) \\ d > (1-\beta) \ln N}} \frac{1}{d} \Bigg)^2 = \frac{1}{R_N} \sum_{k=1}^{R_N} \sum_{\substack{d_1 \backslash \bar{R}_N(k) \\ d_1 > (1-\beta) \ln N}} \sum_{\substack{d_2 \backslash \bar{R}_N(k) \\ d_2 > (1-\beta) \ln N}} \frac{1}{d_1 d_2} =$$

$$= \frac{1}{R_N} \sum_{d_1 > (1-\beta) \ln N}^{R_N} \sum_{d_2 > (1-\beta) \ln N}^{R_N} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{\substack{k \\ \text{о.н.к.}\,(d_1, d_2) \backslash \bar{R}_N(k)}} 1.$$

В последней сумме

$$k = \text{о.н.к.}\,(d_1,\ d_2)\, x + \bar{R}_N y,$$

$$0 < k - \bar{R}_N y < \bar{R}_N$$

и, следовательно,

$$0 < \text{о.н.к.}\,(d_1,\ d_2)\, x \leqslant R_N.$$

Поэтому

$$\frac{1}{R_N} \sum_{k=1}^{R_N} \Bigg(\sum_{\substack{d \backslash \bar{R}_N(k) \\ d > (1-\beta) \ln N}} \frac{1}{d} \Bigg)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{R_N} \sum_{\substack{d_1 = 1 \\ d_1 > (1-\beta) \ln N}}^{R_N} \sum_{\substack{d_2 = 1 \\ d_2 > (1-\beta) \ln N}}^{R_N} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{x=1}^{[\bar{R}_N / \text{о.н.к}\,(d_1\, d_2)]} \times$$

$$\times \left(\left[\frac{R_N - \text{о.н.к.}\,(d_1, d_2)\, x}{\bar{R}_N} \right] + 1 \right).$$

Так как $R_N > \bar{R}_N$, то

$$\frac{R_N - \text{о.н.к.}\,(d_1,\ d_2)\, x}{\bar{R}_N} + 1 \leqslant 2\, \frac{R_N}{\bar{R}_N}.$$

Это дает

$$\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Bigg(\sum_{\substack{d\backslash \bar{R}_N(k)\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Bigg)^2\leqslant\frac{2}{\bar{R}_N}\sum_{d_1>(1-\beta)\ln N}^{R_N}\ \sum_{d_2>(1-\beta)\ln N}^{R_N}\times$$

$$\times\frac{1}{d_1,d_2}\sum_{x=1}^{[\bar{R}_N/\text{о.н.к.}(d_1,d_2)]}1\leqslant 2\sum_{d_1>(1-\beta)\ln N}^{R_N}\ \sum_{d_2>(1-\beta)\ln N}^{R_N}\times$$

$$\times\frac{1}{d_1d_2\,\text{о.н.к.}(d_1d_2)}=2\sum_{d_1>(1-\beta)\ln N}\ \sum_{d_2>(1-\beta)\ln N}\frac{(d_1,d_2)}{d_1^2d_2^2}.$$

Но мы уже убедились в том, что

$$\sum_{d_1>(1-\beta)\ln N}\ \sum_{d_2>(1-\beta)\ln N}\frac{(d_1,d_2)}{d_1^2d^2}=O\left(\frac{\ln\ln N}{\ln^2 N}\right).$$

Итак,

$$\frac{1}{R_N}\sum_{k=1}^{R_N}\Bigg(\sum_{\substack{d\backslash \bar{R}_N(k)\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d}\Bigg)^2=O\left(\frac{\ln\ln N}{\ln^2 N}\right).$$

Подставляя полученные оценки в формулу (5), получаем

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}F\big(I(m)\big)-A(F)=O\left(\frac{1}{\ln N}\sqrt{\frac{\ln\ln N}{\ln^2 N}}\right)+$$

$$+O\left(\frac{\ln\ln N}{\ln^2 N}\right)+O\left(\frac{1}{N^{\beta/2+o(1)}}\right)=O\left(\frac{\ln\ln N}{\ln^2 N}\right),$$

что и требовалось доказать.

Вильнюсский инженерно-строительный институт
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 12.XI.1971

Литература

1. Е. В. Новоселов, Новые методы в вероятностной теории чисел, Изв. АН СССР, серия матем., 28 (1964), 307–364.
2. И. Ильясов, Суммирование сложных функций от функции Эйлера, ДАН СССР, 178, № 3(1968), 529–532.
3. А. Г. Постников, Введение в аналитическую теорию чисел, М., 1971.

DEFORMUOTOS EILERIO FUNKCIJOS REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMO KLAUSIMU

V. Kalinka, L. Postnikova

(*Reziumė*)

Straipsnyje nagrinėjama aritmetinė funkcija

$$I(n)=\sum_{d\backslash n}\frac{\mu(d)}{d+1},$$

taip pat realaus argumento funkcija $F(x)$, tokia, kad intervale $[-1,2]$ yra patenkinta Lipšico sąlyga arba 1° pačiai funkcijai $F(x)$, arba 2° jos išvestinei $F'(x)$. 1 ir 2 teoremose įrodyta, kad egzistuoja skaičius $A(F)$, tenkinantis lygybę

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} F\Big(I(n)\Big)=A(F)+O\Big(R(N)\Big),$$

kurioje

$$R(N)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln N}, & \text{kai } 1^{\circ};\\[2ex] \dfrac{\ln\ln N}{\ln^2 N}, & \text{kai } 2^{\circ}.\end{cases}$$

ON THE DISTRIBUTION OF THE DISTORTED EULER FUNCTION

V. Kalinka, L. Postnikova

(*Summary*)

The paper deals with the arithmetical function

$$I(n) = \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d+1}$$

and with the real variable function $F(x)$ such that the Lipschitz condition satisfy either

1°) the function $F(x)$ itself

or

2°) its derivative $F'(x)$.

We prove (see Th. 1 and Th. 2) that there exists the number $A(F)$ satisfying the equality

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} F\Big(I(n)\Big)=A(F)+O\Big(R(N)\Big),$$

where

$$R(N)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln N}, & \text{if } 1^{\circ}\\[2ex] \dfrac{\ln\ln N}{\ln^2 N}, & \text{if } 2^{\circ}.\end{cases}$$