1972

УДК 517.54

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Э. Г. Кирьяцкий

В настоящей заметке мы продолжаем изучение экстремальных свойств введенных нами в [1] классов $K_n^0(E)$, $n=1, 2, \ldots$. Напомним определение этих классов: регулярную в единичном круге E функцию $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$ будем считать принадлежащей классу $K_n^0(E)$, если n-я разделенная разность

$$[F(z);\ z_0\ z_1\ \ldots\ z_n]$$

функции $F(z)=z^{n-1}f(z)$ не равна нулю при любых $z_0, z_1, \ldots, z_n \in E$. Заметим, что класс $K_1^0(E)$ совпадает с классом всех однолистных и нормированных в E функций, причем

$$K_1^0(E) \supset K_2^0(E) \supset K_3^0(E) \supset \ldots \tag{1}$$

Пусть $I[f]$ — некоторый вещественный функционал, заданный на классах $K_n^0(E)$, и I_n — экстремальное (скажем, наибольшее) значение функционала $I[f]$ на классе $K_n^0(E)$.

Основной задачей в данной работе является вычисление предела последовательности $\{I_n\}$, $n=1, 2, \ldots$. Эта задача решена нами для функционалов $I[f]=\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$, $\operatorname{Re} f'(z)$, $\operatorname{Im} f'(z)$, где z — произвольно фиксированная точка из E. Так, например, если I_n есть наибольшее значение функционала $\operatorname{Re} f(z)$ на классе $K_n^0(E)$, то

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{1-|z|^2}(\operatorname{Re} z+|z|^2).$$

Аналогичная задача ставится и для некоторых других классов однолистных функций.

1. В работах [1], [2], [3] было показано следующее:

1) все классы $K_n^0(E)$ замкнуты относительно равномерной сходимости, т.е., если $f_m(z) \in K_n^0(E)$, $m=1, 2, \ldots$ и последовательность $\{f_m(z)\}$ равномерно сходится внутри E к функции $f(z)$, то $f(z) \in K_n^0(E)$;

2) все классы $K_n^0(E)$ являются компактными, т.е. из любой последовательности функций $\{f_m(z)\}$ из класса $K_n^0(E)$ можно выделить равномерно сходящуюся внутри E последовательность;

3) пересечение $P(E)=\prod\limits_{n=1}^{\infty} K_n^0(E)$ является замкнутым и компактным классом;

4) если $f_n(z)\in K_n^0(E)$ и последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно внутри E к функции $f(z)$, то $f(z)\in P(E)$.

Функционал $I[f]$ $\Big($местами будем обозначать его символом $I[f(z)]\Big)$, заданный на классе $K_1^0(E)$, назовем непрерывным на этом классе, если из равномерной сходимости внутри E, взятой в $K_1^0(E)$ последовательности функций $\{f_n(z)\}$ к функции $f(z)$, следует сходимость последовательности $\{I[f_n]\}$ к $I[f]$.

Из приведенных выше свойств классов $K_n^0(E)$, $P(E)$ легко следует, что непрерывный вещественный функционал $I[f]$ принимает в каждом из этих классов свое наибольшее и наименьшее значение. Функцию $\varphi_n(z)$, в которой функционал $I[f]$ принимает в классе $K_n^0(E)$ наибольшее (наименьшее) значение, назовем максимальной (минимальной) в классе $K_n^0(E)$. Аналогично определяется максимальная (минимальная) функция в классе $P(E)$ и других встречающихся далее классах.

Теорема 1. *Пусть $I[f]$ — непрерывный вещественный функционал, заданный на классе $K_1^0(E)$. Если I_n — наибольшее (наименьшее) значение функционала $I[f]$ на классе $K_n^0(E)$ и I — наибольшее (наименьшее) значение функционала $I[f]$ на классе $P(E)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=I$.*

Доказательство. Пусть для определенности $\varphi_n(z)$ — максимальная в классе $K_n^0(E)$ функция и $I_n=I[\varphi_n]$, а $\varphi(z)$ — максимальная в классе $P(E)$ функция и $I=I[\varphi]$. Выделим из последовательности функций $\{\varphi_n(z)\}$ последовательность $\{\varphi_{n_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся внутри E к некоторой функции $\varphi^*(z)$, которая согласно свойству 4) будет принадлежать классу $P(E)$. Пусть $I^*=I[\varphi^*]$. Так как функционал $I[f]$ непрерывный, то $\lim\limits_{k\to\infty} I_{n_k}=I^*$. Из (1) следует, что последовательность $\{I_n\}$ монотонно убывающая. Кроме того, она ограничена снизу числом I. Значит, из сходимости подпоследовательности $\{I_{n_k}\}$ к пределу I^* следует сходимость к этому пределу всей последовательности $\{I_n\}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} I_n=I^*\geqslant I. \tag{2}$$

Но по определению числа I получаем $I^*\leqslant I$, что вместе с (2) дает равенство $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=I$. Аналогичным образом доказывается теорема в случае, если $\varphi(z)$, $\varphi_n(z)$ — минимальные функции соответственно в классах $P(E)$, $K_n^0(E)$.

2. Обозначим через $C_n^0(E)$ класс регулярных в E функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, удовлетворяющих неравенству $\operatorname{Re} F^{(n)}(z)>0$ при любом $z\in E$, где $F(z)=z^{n-1}f(z)$ и через $L_n^0(E)$ — класс функций

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots+a_kz^k+\cdots,$$

подчиненных условию

$$\sum_{k=2}^{\infty} C_{n+k-1}^{n} |a_k| \leqslant 1 .$$

Как известно из [4], [5], оба названных класса удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} &K_n^0(E) \supset C_n^0(E) \supset L_n^0(E), \\ &C_n^0(E) \supset C_{n+1}^0(E), \qquad\qquad (3) \\ &L_n^0(E) \supset L_{n+1}^0(E). \end{aligned}$$

Лемма 1. *Пересечение* $\prod_{n=1}^{\infty} C_n^0(E)$ $\left(\prod_{n=1}^{\infty} L_n^0(E)\right)$ *классов* $C_n^0(E)$ $\left(L_n^0(E)\right)$ *состоит из единственной функции* $t(z) \equiv z$.

Действительно, пусть

$$f_n(z) = z + a_{2,n} z^2 + \cdots + e_{k,n} z^k + \cdots$$

— любая функция из класса $C_n^0(E)$. Для ее коэффициентов $a_{k,n}$ справедливы оценки [5]:

$$|a_{k,n}| \leqslant \frac{2}{n+1}, \quad k = 2,\ 3,\ \ldots . \qquad (4)$$

Из (4) следует, что любая последовательность функций $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$, где $f_n(z) \in C_n^0(E)$, равномерно сходится внутри E к функции $t(z) \equiv z$. Справедливость леммы 1 для классов $L_n^0(E)$ получаем из (3).

Из леммы 1 легко следует теорема 2.

Теорема 2. *Пусть* $I[f]$ *— непрерывный вещественный функционал, заданный на классе* $C_n^0(E)$ $(L_n^0(E))$. *Если* I_n *— наибольшее или наименьшее значение этого функционала на классе* $C_n^0(E)$ $(L_n^0(E))$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$, *где* $I = I[\varphi(z)]$ *и* $\varphi(z) \equiv z$.

3. Пусть $B^*(E)$ — некоторый класс однолистных регулярных в E функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, обладающих свойством (A): если $f(z) \in B^*(E)$, то и функция

$$f(z, \zeta) = \frac{\zeta z}{f(\zeta)} \; \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} \in B^*(E) \qquad (5)$$

при любом фиксированном $\zeta \in E$. Замыкание класса $B^*(E)$ обозначим через $B(E)$ и покажем, что класс $B(E)$ также обладает свойством (A). Действительно, пусть $f(z) \in B(E)$. Значит, имеется последовательность функций $\{f_n(z)\}$ из $B^*(E)$, равномерно сходящаяся внутри E к однолистной функции $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Тогда последовательность $\{f_n(z, \zeta)\}$ сходится равномерно внутри E к $f(z, \zeta)$. Так как $f_n(z, \zeta) \in B^*(E)$, $n = 1, 2, \ldots$, то $f(z, \zeta) \in B(E)$.

Теорема 3. *Пусть $f(z) \in B(E)$, функция $f(z, \zeta)$ определена формулой (5) и $I[f(z)]$ — непрерывный вещественный функционал, заданный на классе $B(E)$ так, что для любой функции $f(z)$ из $B(E)$ функция*

$$h(\zeta, f) = I[f(z, \zeta)]$$

является гармонической в круге $|\zeta| < 1$. Если $\varphi(z)$ — максимальная или минимальная функция для функционала $I[f(z)]$ в классе $B(E)$, то в круге $|\zeta| < 1$ имеет место тождество

$$I[\varphi(z, \zeta)] \equiv I[\varphi(z)]. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть для определенности $\varphi(z)$ — максимальная в классе $B(E)$ функция, т.е.

$$I[f(z)] \leqslant I[\varphi(z)] \tag{7}$$

при всех $f(z) \in B(E)$. Согласно определению класса $B(E)$ функция $\varphi(z, \zeta)$ также принадлежит классу $B(E)$ при любом фиксированном $\zeta \in E$ и поэтому для нее справедливо неравенство (7)

$$h(\zeta, \varphi) = I[\varphi(z, \zeta)] \leqslant I[\varphi(z)]. \tag{8}$$

Далее из (5) получаем, что $\varphi(z, 0) = \varphi(z)$ и поэтому

$$h(0, \varphi) = I[\varphi(z)]. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что гармоническая в круге $|\zeta| < 1$ функция $h(\zeta, \varphi)$ принимает свое наибольшее значение в точке $\zeta = 0$. Следовательно, $h(\zeta, \varphi) \equiv \equiv h(0, \varphi)$, что и приводит нас к (6).

Замечание 1. Пусть непрерывный функционал $\Phi[f(z)]$ принимает комплексные значения и функция $h(\zeta, f) = \Phi[f(z, \zeta)]$ аналитична в круге $|\zeta| < 1$ для всех $f(z) \in B(E)$. Если $\varphi(z)$ — максимальная функция для функционала $I[f(z)] = |\Phi[f(z)]|$, то, как и раньше, справедливо тождество (6). Оно имеет место и для минимальной функции $\varphi(z)$, если только $I[\varphi(z)] \neq 0$.

Замечание 2. Функциональное уравнение

$$I[f(z, \zeta)] = I[f(z)]$$

относительно функции $f(z)$ всегда имеет решение $f_0(z) = z(1 - az)^{-1}$, где a — произвольно фиксированное число и $|a| \leqslant 1$. Это следует из того, что $f_0(z, \zeta) = f_0(z)$ при любых z, ζ, a.

Теорема 4. *Любая функция $f(z) \in B(E)$ является выпуклой в единичном круге E.*

Доказательство. Рассмотрим заданный на классе $B(E)$ непрерывный вещественный функционал

$$I[f(z)] = 1 + \operatorname{Re}\left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\}, \tag{10}$$

где z — произвольно фиксированная точка из E. Функция $f(z, \zeta)$ аналитична по обеим переменным $z, \zeta \in E$. Кроме того, эта функция при фиксированном $\zeta \in E$ однолистна в круге $|z| < 1$ и поэтому $f'(z, \zeta) \neq 0$ при любых $z, \zeta \in E$. Здесь и в дальнейшем $f'(z,\zeta)$, $f''(z,\zeta)$ означают частные производные функции $f(z,\zeta)$ по z. Отсюда следует, что функция

$$h(\zeta, f)=I[f(z, \zeta)]=1+\mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z, \zeta)}{f'(z, \zeta)}\right\} \tag{11}$$

будет гармонической в круге $|\zeta|<1$. Согласно теореме 3, минимальная функция $\varphi(z)$ рассматриваемого функционала (10) удовлетворяет при любом $\zeta\in E$ равенству

$$\mathrm{Re}\,\frac{z\varphi''(z, \zeta)}{\varphi'(z, \zeta)}=\mathrm{Re}\,\frac{z\varphi''(z)}{\varphi'(z)},$$

которое показывает, что аналитическая в круге $|\zeta|<1$ функция $z\varphi''(z,\zeta)/$ $/\varphi'(z,\zeta)$ имеет здесь постоянную действительную часть. Значит, эта функция равна тождественно постоянной. Кроме того, $\varphi(z,0)=\varphi(z)$ и поэтому

$$\frac{\varphi''(z, \zeta)}{\varphi'(z, \zeta)}=\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}. \tag{12}$$

Вычислим первую и вторую производные по z функции $\varphi(z,\zeta)$ и подставим в (12). Тогда получим

$$\frac{2\zeta\left(\varphi(z)-\varphi(\zeta)\right)-2\zeta\varphi'(z)(z-\zeta)+z\varphi''(z)(z-\zeta)^2}{\left[z\varphi'(z)(z-\zeta)-\zeta\left(\varphi(z)-\varphi(\zeta)\right)\right](z-\zeta)}=\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}.$$

Решая это уравнение относительно $\varphi(\zeta)$ и учитывая, что $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$, получим $\varphi(\zeta)=\zeta(1-a\zeta)^{-1}$, где a – некоторое постоянное, причем из аналитичности функции $\varphi(\zeta)$ следует, что $|a|\leqslant 1$. Таким образом, функция, в которой функционал (10) имеет наименьшее значение, должна иметь вид

$$\varphi(z)=\frac{z}{1-az}, \quad |a|\leqslant 1. \tag{13}$$

Любая функция вида (13) принадлежит $B(E)$ и для нее функционал (10) положителен. Следовательно, этот функционал положителен для любой функции $f(z)$ из класса $B(E)$. Другими словами, для любых $z\in E$ и $f(z)\in B(E)$ выполнено неравенство

$$1+\mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0, \tag{14}$$

из которого, как известно ([6]), следует выпуклость функции $f(z)$ в единичном круге E.

Замечание 3. Так как $P(E)\subset B(E)$, то класс $P(E)$ состоит из выпуклых и однолистных в E функций. Этот результат был также получен нами другим путем в работе [1].

Пользуясь известными оценками для выпуклых функций, получаем следствие.

Следствие 1. *Для любой функции $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$, принадлежащей классу $B(E)$ $(P(E))$, справедливы точные оценки*

$$\frac{|z|}{1+|z|}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{1-|z|}, \tag{15}$$

$$\frac{1}{(1+|z|)^2}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1}{(1-|z|)^2}, \tag{16}$$

$$|a_k|\leqslant 1,\quad k=2,\ 3,\ \ldots \tag{17}$$

Знаки равенства в (15), (16) *и* (17) *имеют место только для функций вида* $f(z)=z\,(1-e^{i\alpha}z)^{-1}$, *принадлежащих классу* $P(E)$.

Следствие 2. *Пусть $A_{k,n}$ — наибольший по модулю K-й коэффициент в разложении функции $f(z)\in K_n^0(E)$ в ряд Маклорена. Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty}|A_{k,n}|=1$.

В самом деле, модуль $к$-го коэффициента $a_{k,n}(f)$ в разложении функции $f(z)\in K_n^0(E)$ в ряд Маклорена является непрерывным вещественным функционалом, заданным на компактном классе $K_n^0(E)$. Следовательно, существует такое число $A_{k,n}$, что

$$\max_{f\in K_n^0(E)}|a_{k,n}(f)|=|A_{k,n}|.$$

Пользуясь теоремой 1 и следствием 1, получим $\lim\limits_{n\to\infty}|A_{k,n}|=1$.

Аналогичным образом доказывается следствие 4.

Следствие 4. *Пусть z, $|z|=r<1$, — произвольное фиксированное число и функция $f_n(z)$ $(\psi_n(z))$ такая, что*

$$|f_n(z)|=\max_{f\in K_n^0(E)}|f(z)|,\quad \Big(|\psi_n(z)|=\min_{f(z)\in K_n^0(E)}|f(z)|\Big).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(z)|=\frac{r}{1-r}\quad\Big(\lim_{n\to\infty}|\psi_n(z)|=\frac{r}{1+r}\Big).$$

Результаты последних двух следствий были получены нами также в работе [3] несколько иным путем.

4. Обозначим через $P_0(E)$ однопараметрическое семейство функций вида

$$f(z)=\frac{z}{1-az},\quad z\in E, \tag{18}$$

где параметр a принимает все значения из круга $|a|\leqslant 1$. Любая функция (18) принадлежит классу $P(E)$ и поэтому $P_0(E)\subset P(E)$.

Лемма 2. *Множество значений, принимаемых всеми функциями из $P_0^{*}(E)$, в фиксированной точке $\xi\in E$ представляет собой круг*

$$\left|z-\frac{\xi}{1-|\xi|^2}\right|\leqslant\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}.$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости леммы, надо найти образ круга $|a|\leqslant 1$ при отображении $\xi\,(1-a\,\xi)^{-1}$.

Лемма 3. *Для любого $\zeta \in E$ и любой функции $f(z) \in B(E)$ всегда найдется функция $f_0(z) \in P_0(E)$ такая, что*

$$f_0(\zeta) \equiv \zeta(1 - a\zeta)^{-1} = f(\zeta). \tag{19}$$

Действительно, решая уравнение (19) относительно a, получим

$$a = \frac{f(\zeta) - \zeta}{\zeta f(\zeta)}.$$

Так как функция $f(z) \in B(E)$, то и функция

$$f(z, \zeta) = z + \frac{f(\zeta) - \zeta}{\zeta f(\zeta)} z^2 + \dots$$

также принадлежит $B(E)$ и ее второй коэффициент по следствию 1 не превышает по модулю единицы. Значит $|a| \leqslant 1$ и лемма доказана.

Из лемм 2 и 3 непосредственно следует теорема 5.

Теорема 5. *Множество значений, принимаемых всеми функциями $f(z)$ из $B(E)$, в фиксированной точке $\xi \in E$ представляет собой круг*

$$\left| z - \frac{\xi}{1 - |\xi|^2} \right| \leqslant \frac{|\xi|^2}{1 - |\xi|^2}.$$

Из приведенной теоремы и теоремы 1 легко получаются следствия 5 и 6.

Следствие 5. *Для любой функции $f(z) \in B(E)$ справедливы точные оценки*

$$\frac{1}{1 - |z|^2} (\operatorname{Im} z - i|z|^2) \leqslant \operatorname{Im} f(z) \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2} (\operatorname{Im} z + i|z|^2),$$

$$\frac{1}{1 - |z|^2} (\operatorname{Re} z - |z|^2) \leqslant \operatorname{Re} f(z) \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2} (\operatorname{Re} z + |z|^2),$$

$$\arcsin \frac{|z|^2}{z} - \arg z \leqslant \arg f(z) \leqslant \arcsin \frac{|z|^2}{z} + \arg z.$$

Знаки равенства реализуются лишь функцией $f(z) = z(1 - e^{i\alpha} z)^{-1} \in P_0(E)$ при подходящем выборе α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$.

Следствие 6. *Справедливы равенства*

$$\lim_{n \to \infty} \begin{matrix} \max \\ \min \\ {\scriptstyle f \in K_n^0(E)} \end{matrix} \operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{1 - |z|^2} (\operatorname{Im} z \pm i|z|^2),$$

$$\lim_{n \to \infty} \begin{matrix} \max \\ \min \\ {\scriptstyle f \in K_n^0(E)} \end{matrix} \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{1 - |z|^2} (\operatorname{Re} z \pm |z|^2),$$

$$\lim_{n \to \infty} \begin{matrix} \max \\ \min \\ {\scriptstyle f \in K_n^0(E)} \end{matrix} \arg f(z) = \arcsin \frac{|z|^2}{z} \pm \arg z,$$

где знак плюс в правой части указанных равенств соответствует символу max, *а знак минус соответствует символу* min.

Теорема 6. *Пусть z — фиксированное число и $|z|=r<1$. Тогда для любой функции $f(z)\in B(E)$ справедливы точные оценки*

$$\frac{1}{(1+r)^2}\leqslant \operatorname{Re} f'(z)\leqslant \frac{1}{(1-r)^2},\quad 0\leqslant r\leqslant \frac{1}{2}, \tag{20}$$

$$\frac{1-2r^2}{2(1-r^2)^2}\leqslant \operatorname{Re} f'(z)\leqslant \frac{1}{(1-r)^2},\quad \frac{1}{2}<r<1, \tag{21}$$

$$-\eta(r)\leqslant \operatorname{Im} f'(z)\leqslant \eta(r), \tag{22}$$

где

$$\eta(r)=\frac{(\sqrt{8r^2+1}-1)\sqrt{(1+3r^2)\sqrt{8r^2+1}-(4r^4+7r^2+1)}}{\sqrt{2}\ \sqrt{1-r^2}\ [\sqrt{8r^2+1}-(2r^2+1)]^2}. \tag{23}$$

Знаки равенства реализуются лишь функциями вида $f(z)=z(1-e^{i\alpha}z)^{-1}$.

Доказательство. Все эти неравенства доказываются приемом, аналогичным использованному при доказательстве теоремы 4. Для определенности остановимся на втором из неравенств (21). Введем непрерывный функционал $I[f]=\operatorname{Re} f'(z)$ на классе $B(E)$ и рассмотрим соответствующую этому функционалу функцию $h(\zeta,f)=\operatorname{Re} f'(z,\zeta)$, которая является гармонической в круге $|\zeta|<1$. Если $\varphi(z)$ максимальная функция рассматриваемого нами функционала, то по теореме 3 имеем

$$\operatorname{Re}\varphi'(z,\zeta)=\operatorname{Re}\varphi'(z)$$

при любом $\zeta\in E$. Отсюда получаем функциональное уравнение относительно $\varphi(\zeta)$

$$\varphi'(z,\zeta)=\frac{\zeta}{f(\zeta)}\ \frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta)}{z-\zeta}+\frac{\zeta z}{f(\zeta)}\ \frac{\varphi'(z)(z-\zeta)-(\varphi(z)-\varphi(\zeta))}{(z-\zeta)^2}=\varphi'(z).$$

Решая это уравнение, получим

$$\varphi(\zeta)=\frac{\zeta z^2\varphi(z)-[\varphi(z)+z\varphi'(z)]\zeta^2}{[\zeta(1-\sqrt{\varphi'(z)})+z\sqrt{\varphi'(z)}]\cdot[\zeta(-1-\sqrt{\varphi'(z)})+z\sqrt{\varphi'(z)}]}. \tag{24}$$

Так как не могут одновременно выполняться неравенства

$$\left|\frac{z\sqrt{\varphi'(z)}}{1-\sqrt{\varphi'(z)}}\right|\geqslant 1,\qquad \left|\frac{z\sqrt{\varphi'(z)}}{1+\sqrt{\varphi'(z)}}\right|\geqslant 1,$$

то один из корней знаменателя в (24) лежит внутри единичного круга. Однако функция $\varphi(\zeta)$ аналитична в $|\zeta|<1$ и поэтому рациональная дробь относительно ζ, стоящая в правой части (24), должна быть сократима. Учитывая, что $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$, получим функцию $\varphi(\zeta)$ в следующем виде:

$$\varphi(\zeta)=\frac{\zeta}{1-a\zeta}.$$

Так как $\varphi(\zeta)\in B(E)$, то $|a|\leqslant 1$, т.е. $\varphi(\zeta)\in P_0(E)$. Элементарным путем можно убедиться в том, что второе из неравенств (21) выполняется для любой функции из $P_0(E)$.

Из теоремы 1 и теоремы 6 получаем следствие 7.

Следствие 7. *Справедливы равенства*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{f\in K_n^0(E)} \operatorname{Re} f'(z) = \frac{1}{(1-r)^2}, \quad 0\leqslant r<1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \min_{f\in K_n^0(E)} \operatorname{Re} f'(z) = \frac{1}{(1+r)^2}, \quad 0\leqslant r\leqslant \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \min_{f\in K_n^0(E)} \operatorname{Re} f'(z) = \frac{1-2r^2}{2(1-r^2)^2}, \quad \frac{1}{2}<r<1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{f\in K_n^0(E)} \operatorname{Im} f'(z) = \eta(r), \quad 0\leqslant r<1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \min_{f\in K_n^0(E)} \operatorname{Im} f'(z) = -\eta(r), \quad 0\leqslant r<1,$$

где $|z|=r<1$ *и* $\eta(r)$ *определяется формулой* (22).

5. **Теорема 7.** *Пусть* $S(f)$ *означает площадь области* D_r, *являющейся образом круга* $|z|\leqslant r<1$ *при отображении его с помощью функции* $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ *из класса* $B(E)$. *Тогда имеют место точные оценки*

$$\pi r^2 \leqslant S(f) \leqslant \frac{\pi r^2}{(1-r^2)^2}, \quad f\in B(E).$$

Знак равенства в первом из этих неравенств достигается функцией $\varphi(z)\equiv z$, *а во втором функцией* $\varphi(z)=z(1-e^{i\alpha}z)^{-1}\in P_0(E)$, *где* $0<\alpha<2\pi$.

Действительно, площадь $S(f)$ области D_r выражается формулой ([6]):

$$S(f)=\pi(r^2+2|a_2|r^4+\cdots+n|a_n|r^{2n}+\cdots).$$

Согласно следствию 1, имеем $|a_n|\leqslant 1$ и поэтому

$$\pi r^2\leqslant S(f)\leqslant \pi(r^2+2r^4+\cdots+nr^{2n}+\cdots)=\frac{\pi r^2}{(1-r^2)^2},$$

что приводит к справедливости теоремы 7.

Следствие 8. *Справедливы равенства*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{f\in K_n^0(F)} S(f) = \frac{\pi r^2}{(1-r^2)^2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \min_{f\in K_n^0(E)} S(f) = \pi r^2.$$

Вильнюсский инженерно-строительный институт

Поступило в редакцию 1.IX.1971

Литература

1. Э. Г. Кирьяцкий, Некоторые экстремальные свойства функций с отличной от нуля разделенной разностью, Liet. matem. rink., X, № 4 (1970), 733–744.
2. Э. Г. Кирьяцкий, О функциях, n-ая разделенная разность которых не равна нулю, Liet. matem. rink., I, № 1–2 (1961), 109–116.
3. Э. Г. Кирьяцкий, Некоторые экстремальные задачи в классах $K_n(E)$ и $P(E)$, Liet. matem. rink., III, № 2(1963), 83–96.
4. Б. Е. Гопенгауз, О некоторых классах аналитических функций, Труды Томского университета, 189 (1966).
5. Б. Е. Гопенгауз, Несколько замечаний о функциях, имеющих положительную вещественную часть n-ой производной, Труды Томского университета, 191 (1968).

KAI KURIOS VIENALAPIŲ FUNKCIJŲ KLASĖS

E. Kirjackis

(*Reziumė*)

Reguliari vienetiniame skritulyje E funkcija $f(z), f(0)=0, f'(0)=1$, priklauso klasei $K_n^0(E)$, jei bet kuriems $z_0, z_1, \ldots, z_n \in E$ funkcijos $F(z)=z^{n-1}f(z)$ padalytas skirtumas $[z_0\ z_1 \ldots z_n]$ nėra lygus nuliui. Klasė $K_1^0(E)$ sutampa su vienalapių funkcijų klase ir $K_1^0(E) \supset K_2^0(E) \supset K_3^0(E) \supset \ldots$

Darbe nagrinėjame kai kuriuos ekstremalinius uždavinius $K_n^0(E)$ klasėse.

ÜBER GEWISSE KLASSEN SCHLICHTEN FUNKTIONEN

E. Kirjatsky

(*Zusammenfassung*)

Eine im Einheitskreise E reguläre Funktion $f(z), f(0)=0, f'(0)=1$ gehört der Klasse $K_n^0(E)$ an, sofern die dividierte Differenz n-ter Ordnung $[z_0\ z_1 \ldots z^n]$ der Funktion $F(z)=z^{n-1}f(z)$ für beliebige $z_0, z_1, \ldots z_n \in E$ nicht gleich Null ist. Die Klasse $K_1^0(E)$ ist mit der Klasse der bereiche E schlichten Funktionen identisch und $K_1^0(E) \supset K_2^0(E) \supset K_3^0(E) \supset \ldots$

In der Arbeit werden einige extremale Aufgaben fur die Klassen $K_n^0(E)$ untersucht.