XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3

1972

УДК 519.21

КРИТЕРИИ ЭРГОДИЧНОСТИ ОДНОРОДНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ В СПЕЦИАЛЬНОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II

З. Навицкас

Настоящая работа является продолжением предшествующей. Обозначения те же, что и в первой части. При ссылке на формулы, леммы, свойства, содержащиеся в первой части статьи, указывается лишь их номер.

§ 5. Гармонические меры

В этом параграфе исследуем свойства гармонических мер.

Для удобства элементы множества A пронумеруем от 1 до s и вместо них будем писать соответствующие номера.

Лемма 5.1. *Пусть даны куски* II *типа марковской цепи в фазовых пространствах* $\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}$ *и* $\mathfrak{U}_{m_1}^{m_2}$, *где* $0<m_1\leqslant n_1<n_2\leqslant m_2<+\infty$, *тогда*

$$\mathfrak{M}_j(\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2})\supset\mathfrak{M}_j(\bar{\mathfrak{U}}_{m_1}^{m_2}), \tag{5.1}$$

где $\mathfrak{M}_j(\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2})$ – *совокупность векторов типа* (1.11).

Доказательство. Пусть марковские цепи $(u_n',\ n\geqslant 0)$, $(u_n'',\ n\geqslant 0)$ являются кусками II типа при фиксированных краевых условиях $\{q_{ab}' : a,\ b\in\Gamma_{n_1n_2}\}$ и $\{q_{ab}'' : a,\ b\in\Gamma_{m_1m_2}\}$ соответственно в фазовах пространствах $\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}$ и $\bar{\mathfrak{U}}_{m_1}^{m_2}$.

В марковскую цепь $(u_n'',\ n\geqslant 0)$ вложим марковскую цепь II типа $(y_n',\ n\geqslant 0)$ в фазовом пространстве $\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}$, условные вероятности перехода через один шаг которой имеют вид

$$\bar{\bar{p}}_{ab}=\boldsymbol{P}\{y_{n+1}'=b\mid y_n'=a\}=$$
$$=\begin{cases} p_{ab}, & \text{если}\quad a\in\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2},\ b\in\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}\quad\text{или}\quad a\in\Gamma_{n_1n_2},\ b\in\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2},\\ q_{ab}''', & \text{если}\quad a,\ b\in\Gamma_{n_1}'\qquad\quad\ \text{или}\quad a,\ b\in\Gamma_{n_2}'',\end{cases} \tag{5.2}$$

где p_{ab} условные вероятности перехода через один шаг цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ и $q_{ab}'''=\boldsymbol{P}\{u_{\tau'}=b\mid u_0=a\}$, а

$$\tau'(\omega)=\inf\{m:m>0,\ x_m\in\Gamma_{n_1n_2},\ x_k\,\bar{\in}\,\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2},\ 0<k<m\}.$$

Из (5.2) следует, что $(y_n',\ n\geqslant 0)$ является куском II типа в фазовом пространстве $\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}$ с краевым условием $\{q_{ab}''' : a,\ b\in\Gamma_{n_1n_2}\}$.

Когда $\{q_{ab}'' : a,\ b\in\Gamma_{m_1m_2}\}$ пробегает всевозможные значения, то $\{q_{ab}''' : a,\ b\in\Gamma_{n_1n_2}\}$ пробегает лишь часть возможных краевых условий $\{q_{ab}' : a,\ b\in\Gamma_{n_1n_2}\}$, откуда и из свойства 4 (§ 4) следует доказательство леммы.

Лемма 5.2. *Пусть при фиксированном целом* $0<j<+\infty$ *имеем*:

а) *последовательность кусков II типа полунепрерывной марковской цепи* $(x_n^{(\hat{E})}, n\geqslant 0)$ *в соответственных фазовых пространствах* $\{\mathfrak{U}_{n_1(m)}^{n_2(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, *где* $n_1(m)<j<n_2(m)$, $n_1(m)\geqslant n_1(m+1)$, $n_2(m)<n_2(m+1)$ и

$$\lim_{m\to\infty} \bar{\mathfrak{U}}_{n_1(m)}^{n_2(m)} = \hat{E} \tag{5.3}$$

с фиксированными краевыми условиями $\{q_{ab}(m) : a, b\in\Gamma_{n_1(m)\, n_2(m)}\}$, *для которых справедливо* (1.16), *если только* $n_1(m)=1$;

б) *положительное решение* $\{\eta_m(a) : a\in\bar{\mathfrak{U}}_{n_1(m)}^{n_2(m)}\}$, *удовлетворяющее*

$$\sum_{i=1}^{s} \eta_m\Big((i, j)\Big)=1, \tag{5.4}$$

стохастической системы уравнений куска II типа в фазовом пространстве $\bar{\mathfrak{U}}_{n_1(m)}^{n_2(m)}$.

Можно выбрать подпоследовательность $\{\eta_{m_i}(a) : a\in\hat{E}\}_{i=1}^{\infty}$ *со свойствами*:

в) *существует*

$$\lim_{i\to\infty} \eta_{m_i}(a)=\eta(a)>0 \qquad (a\in\ddot{E}),$$

г) $\sum_{k=1}^{s} \eta(k, j)=1,$

д) $\{\eta(a) : \in\hat{E}\}$ *является положительным решением стохастической системы уравнений цепи* $(x_n^{(\hat{E})}, n\geqslant 0)$.

Доказательство. Если положим $\eta_{m_i}(a)\equiv 0$ при $a\in\hat{E}/\bar{\mathfrak{U}}_{n_1(m_i)}^{n_2(m_i)}$, тогда имеет смысл предел в). Из стохастических уравнений соответствующего куска следует, что для каждого $a\in\hat{E}$ существует $M(a)>0$ и имеет место

$$0<\eta_m(a)\leqslant M(a) \qquad (m\geqslant 1).$$

В силу того, что из ограниченной бесконечной последовательности всегда можно выбрать сходящиеся подпоследовательности, следует существование подпоследовательности $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющей в) и г).

Справедливость д) проверяется тривиальным образом. Лемма доказана.

Исследуем вопрос об единственности решения $\{\eta(a) : a\in\hat{E}\}$ стохастической системы уравнений марковской цепи $(x_n^{(\hat{E})}, n\geqslant 0)$. Если оно единственно, тогда справедливы (1.14) и (1.15).

Сначала опишем полезное нам преобразование марковской цепи $(u_n^{(m)}, n\geqslant 0)$ (куска II типа в фазовом пространстве $\bar{\mathfrak{U}}_{n_1(m)}^{n_2(m)}$).

Определим последовательность марковских моментов $\{\tau_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_{k+1}^{(m)}(\omega)=\inf\left\{n : n>\tau_k,\ u_n^{(m)}\in M_j\Big(n_2(m)\Big)\right\},$$

если

$$u_{\tau_k}^{(m)}(\omega)\in\{(i, j) : i=\overline{1, s}\},$$

или

$$\tau_{k+1}^{(m)}(\omega)=\inf\left\{n: n>\tau_k,\ u_n^{(m)}\in\{(i,\ j): i=\overline{1,\ s}\}\right\},$$

если

$$u_{\tau_k}^{(m)}(\omega)\in\left\{\left(i,\ n_2(m)+1\right): i=\overline{1,\ s}\right\},$$

и

$$\tau_0(\omega)=\inf\left\{n: n\geqslant 0,\ u_n^{(m)}\in M_j\left(n_2(m)\right)\right\},$$

где

$$M_j\left(n_2(m)\right)=\left\{(i,\ j),\ \left(i,\ n_2(m)+1\right): i=\overline{1,\ s}\right\}.$$

Положим

$$y_n^{(m)}(\omega)=u_{\tau_n(\omega)}^{(m)}(\omega).$$

Очевидно, случайная функция $(y_n^{(m)},\ n\geqslant 0)$ при $n_2(m)<+\infty$ является однородной марковской цепью в фазовом пространстве $M_j\left(n_2(m)\right)$, удовлетворяющей условиям (2.12), (2.13), а) и в) леммы 2.2, условные вероятности перехода через один шаг которой имеют вид

$$q_{ab}(m)=\boldsymbol{P}\{y_{n+1}^{(m)}=b\mid y_n^{(m)}=a\}=$$

$$=\begin{cases}\geqslant 0, & \text{если}\quad a\in\{(i,\ j): i=\overline{1,\ s}\},\quad b\in M_j\left(n_2(m)\right),\\ \geqslant 0, & \text{если}\quad a\in\left\{\left(i,\ n_2(m)+1\right)\ i=\overline{1,\ s}\right\},\ b\in\{(i,\ j): i=\overline{1,\ s}\},\\ \equiv 0 & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Лемма 5.3. *При $n_2(m)<+\infty$ имеет место*:

$$\frac{\eta_m(i,\ j)}{\eta_m(l,\ j)}=\frac{\bar{u}_m\left((i,\ j)\right)}{\bar{u}_m\left((l,\ j)\right)}\qquad (i,\ l=\overline{1,\ s}),\tag{5.6}$$

где $\{\eta_m(a): a\in\bar{\mathfrak{U}}_{n_1(m)}^{n_2(m)}\}$ и $\left\{\bar{u}_m(a): a\in M_j\left(n_2(m)\right)\right\}$ — соответственные решения стохастических систем уравнений марковских цепей $(u_n^{(m)},\ n\geqslant 0)$ и $(y_n^{(m)},\ n\geqslant 0)$.

Доказательство. Аналогично доказательству свойства 4 (§ 4).

Лемма 5.4. *Для любой последовательности марковских цепей $\{(y_n^{(m)},\ n\geqslant 0)\}_{m=1}^{\infty}$, определяемой формулой* (5.5), *в соответственных фазовых пространствах $\left\{M_j\left(n_2(m)\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ при любых фиксированных краевых условиях для $\{(u_n^{(m)},\ n\geqslant 0)\}_{m=1}^{\infty}$ начиная с некоторого $0<N<m$ имеет место*:

а) $q_{ab}(m)\leqslant q_{ab}(m+1)<1\quad \left(a,\ b\in\{(i,\ j): i=\overline{1,\ s}\}\right)$,

б) $Q_a(m)>Q_a(m+1)\qquad \left(a\in\{(i,\ j): i=\overline{1,\ s}\}\right)$,

где

$$Q_a(m)=\sum_{b\in\bar{\Gamma}_{n_2(m)+1}} q_{ab}(m),$$

в) существуют не зависящие от функций $n_1(m)$ и $n_2(m)$ пределы:

$$\lim_{m\to\infty} q_{ab}(m)=q_{ab}(\infty)>0 \quad \left(a,\ b\in\{(i,\ j): i=\overline{1,\ s}\}\right),$$

$$\lim_{m\to\infty} Q_a(m)=Q_a(\infty).$$

Доказательство. Для $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ и состояний $a,\ b\in\{(i,\ j): i=\overline{1,\ s}\}$ построим измеримые множества:

$$A_0=\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{\omega: x_0^{(\hat{E})}=a,\ x_n^{(\hat{E})}\in\{(i,\ k): i=\overline{1,\ s},\ k<j\} \text{ для всех } 0<n\leqslant m,\right.$$

$$\left.x_{m+1}^{(\hat{E})}=b\right\}\cup\{\omega: x_0^{(\hat{E})}=a,\ x_1^{(\hat{E})}=b\},$$

$$A_1(k)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{\omega: x_0^{(\hat{E})}=a,\ x_n^{(\hat{E})}\in\{(i,\ l): i=\overline{1,\ s},\right.$$

$$\left.j<l\leqslant n_2(k)\} \text{ для всех } 0<n\leqslant m,\ x_{m+1}^{(\hat{E})}=b\right\}.$$

Справедливо

$$A_1(k)\subset A_1(k+1). \tag{5.7}$$

В силу (5.3) следует, что начиная с некоторого $0<N<m$ выполняется $n_1(m)=1$, поэтому согласно определению $(y_n^{(m)},\ n\geqslant 0)$ имеет место

$$q_{ab}(m)=\boldsymbol{P}\{A_0\mid x_0^{(\hat{E})}=a\}+\boldsymbol{P}\{A_1(m)\mid x_0^{(\hat{E})}=a\}\ \left(a,\ b\in\{(i,\ j): i=\overline{1,\ s}\}\right),$$

откуда в силу (5.7) получаем доказательство а).

Так как

$$Q_a(m)=1-\sum_{b\in\bar{\Gamma}_j} q_{ab}(m) \quad \left(a=\{(i,\ j): i=\overline{1,\ s}\}\right),$$

то следует, что б), в) являются следствием а) и б). Доказательство закончено.

Следствие 5.1. *Если $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ возвратна, тогда*

а) $Q_a(\infty)\equiv 0$,

б) $\left\{\eta\left((i,\ j)\right): i=\overline{1,\ s}\right\}$ *— единственно и определяется из системы уравнений:*

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{a\in\bar{\Gamma}_j}\eta(a)\,q_{ab}(\infty)=\eta(b) \quad \left(b\in\{(i,\ j): i=\overline{1,\ s}\}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{s}\eta(i,\ j)=1, \end{cases}$$

в) $\varkappa^{(\infty)}(j)=\left(\eta(1,\ j),\ \ldots,\ \eta(s,\ j)\right)$, *т. е.* $\varkappa^{(\infty)}(j)$ *является вектором типов* (1.14) *и* (1.15).

Доказательство. Так как

$$1-Q_a(\infty)=\sum_{b\in\bar{\Gamma}_j} q_{ab}(\infty)=P\left\{\bigcup_{m=2}^{\infty}\{\omega: x_m^{(\hat{E})}=b,\ x_n\,\bar{\in}\,\bar{\Gamma}_j\right.$$

$$\left.\text{для всех}\ \ 0<n<m\}\cup\{\omega: x_1^{(\hat{E})}=b\}\mid x_0^{(\hat{E})}=a\right\},$$

то в случае возвратности $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ должно

$$1-Q_a(\infty)=1,$$

откуда следует а); б) следует из леммы 5.4, пункта а) этого следствия, (5.6) и того, что если в последовательности систем линейных уравнений с k $(k<+\infty)$ неизвестными и k уравнениями соответствующие коэффициенты имеют пределы, то и будучи ограниченными константой решения этих уравнений (если таковые существуют) стремятся к решению предельной системы уравнений (в случае его существования). Пункт в) очевиден. Следствие доказано.

Следствие 5.2. *Пусть* $x_n^{(\hat{E})}=(i_n,\ j_n)$ $(i_n=\overline{1,\ s};\ j_n=0,\ 1, 2,\ \ldots)$, $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ *возвратна тогда и только тогда, когда*

$$P\{j_n=j\ \text{для некоторого}\ n\geqslant 1\mid x_0=(i,\ j)\}=1,$$

хотя бы для одного значения $1\leqslant i\leqslant s$.

Доказательство получаем, воспользовавшись леммой 5.4 и тем, что состояния $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ составляют один существенный класс.

В случае невозвратности марковской цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ величины $\{Q_a(\infty): a\in\bar{\Gamma}_j\}$ больше нуля и поэтому $\{\eta(a): a\in\bar{\Gamma}_j\}$ зависит и от поведения $\{q_{ab}(m): b\in\bar{\Gamma}_j,\ a\in\bar{\Gamma}_{n_2(m)+1}\}$ при возрастании m.

Введем величины:

$$\pi_m(a,\ b,\ \bar{\Gamma}_l,\ \bar{\Gamma}_k)=P\{u_\tau^{(m)}=b\mid u_0^{(m)}=a\},$$

где

$$\tau(\omega)=\inf\{n: u_n^{(m)}\in\bar{\Gamma}_l\cup\bar{\Gamma}_k\}\ \left(n_1(m)-1\leqslant l<k\leqslant n_2(m)+1\right)$$

и

$$\tilde{\pi}_m(i,\ l,\ m)=P\left\{u_{\tilde{\tau}}^{(m)}=\left(l,\ n_2(m)\right)\,\Big|\,u_0^{(m)}=\left(i,\ n_2(m)+1\right)\right\},$$

где

$$\tilde{\tau}(\omega)=\inf\{n: u_n^{(m)}\in\bar{\Gamma}_{n_2(m)}\}.$$

Обозначим при $i,\ l=\overline{1,\ s}$:

$$\alpha_{il}(k,\ m)=\pi_m\left((i,\ k),\ (l,\ k-1),\ \bar{\Gamma}_{k-1},\ \bar{\Gamma}_{n_2(m)+1}\right)\ \left(j<k\leqslant n_2(m)\right),$$

$$\beta_{il}(k, m)=\pi_m\left((i, k),\ (l, n_2(m)+1),\ \bar{\Gamma}_{k-1},\ \bar{\Gamma}_{n_2(m)+1}\right)(j<k\leqslant n_2(m)),$$

$$\alpha_{il}\left(n_2(m)+1,\ m\right)=\tilde{\pi}_m(i,\ l,\ m).$$

Определим в s-мерном векторном пространстве операторы:

$$T_k^{(m)}(p)=(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_s)\cdot\left(\alpha_{il}(k,\ m)\right)_{i,\,l=1}^{s},$$

$$L_k^{(m)}(p)=(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_s)\cdot\left(\beta_{il}(k,\ m)\right)_{i,\,l=1}^{s},$$

где $p=(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ — вектор, а $\left(\alpha_{il}(k, m)\right)_{i,l=1}^{s}$ и $\left(\beta_{il}(k, m)\right)_{i,l=1}^{s}$ — квадратные матрицы s-го порядка.

Нам понадобятся следующие свойства:

I) $\alpha_{il}(k, m) \leqslant \alpha_{il}(k, m+1)$

и существует

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_{il}(k, m) = \alpha_{il}(k);$$

II) $\sum\limits_{l=1}^{s} \beta_{il}(k, m) \geqslant \sum\limits_{l=1}^{s} \beta_{il}(k, m+1),$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{l=1}^{s} \beta_{il}(k, m) = \beta_i > 0;$$

III) $\sum\limits_{l=1}^{s} \alpha_{il}(k, m) + \sum\limits_{l=1}^{s} \beta_{il}(k, m) = 1.$

Доказательство I и III свойств аналогично доказательству леммы 5.4, а II — является следствием I и III.

IV) Если положим

$$\| p \| = \sum_{i=1}^{s} |p_i|,$$

тогда

$$\| T_k^{(m)} \| = \max_{1\leqslant i\leqslant s} \left\{ \sum_{l=1}^{s} \alpha_{il}(k, m) \right\} \leqslant 1,$$

$$\| L_k^{(m)} \| = \max_{1\leqslant i\leqslant s} \left\{ \sum_{l=1}^{s} \beta_{il}(k, m) \right\} \leqslant 1,$$

$$\| T_k^{(m)} + L_k^{(m)} \| = 1,$$

$$\lim_{m\to\infty} T_k^{(m)} = T_k = \left(\alpha_{il}(k)\right)_{i,l=s}^{s},$$

т.е. операторы $T_k^{(m)}$ и $L_k^{(m)}$ — линейные и ограниченные*).

Доказательство очевидно.

Построим

$$T^{(m)} = \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \big(T_{n_s(m)+1}^{(m)} L_{n_s(m)}^{(m)} + T_{n_s(m)+1}^{(m)} \cdot T_{n_s(m)}^{(m)} L_{n_s(m)-1}^{(m)} + \ldots +$$

$$+ T_{n_s(m)+1}^{(m)} \cdot \ldots \cdot T_{j+2}^{(m)} L_{j+1}^{(m)}\big)^n \Big] \cdot T_{n_s(m)+1}^{(m)} \cdot T_{n_s(m)}^{(m)} \cdot T_{n_s(m)-1}^{(m)} \cdot \ldots \cdot T_{j+1}^{(m)}.$$

V. *Если i' $(1 \leqslant i' \leqslant s)$ фиксирован, тогда*

$$\left(\delta(1, i'), \ldots, \delta(s, i')\right) \cdot T^{(m)} = \left(q_{(i', n_s(m)+1)(i,j)}(m), \ldots, q_{(i', n_s(m)+1)(s,j)}(m)\right).$$

*) Здесь и далее имеется в виду сходимость операторов по норме.

Доказательство. Пусть

$$T'_m = T^{(m)}_{n_2(m)+1} L^{(m)}_{n_2(m)} + T^{(m)}_{n_2(m)+1} T^{(m)}_{n_2(m)} L^{(m)}_{n_2(m)-1} + \ldots +$$
$$+ T^{(m)}_{n_2(m)-1} \cdot \ldots \cdot L^{(m)}_{j+1} = (h^{(m)}_{il})^s_{i,l=1},$$
$$T''_m = T^{(m)}_{n_2(m)+1} \cdot T^{(m)}_{n_2(m)} \cdot \ldots \cdot T^{(m)}_{j+1} = (t^{(m)}_{il})^s_{i,l=1},$$

тогда из вероятностных соображений получаем:

$$t^{(m)}_{il} = \sum_{n=1}^{\infty} P \left\{ u^m_n = (l,j),\ u^{(m)}_k = (l,\ j),\ u^{(m)}_k \in \bar{\Gamma}_j \cup \bar{\Gamma}_{n_2(m)+1} \right.$$
$$\left. \text{для всех } 0<k<n \mid u^{(m)}_0 = \big(i,\ n_2(m)+1\big) \right\},$$
$$h^{(m)}_{il} = \sum_{n=1}^{\infty} P \left\{ u^{(m)}_n = \big(l,\ n_2(m)+1\big),\ u^{(m)}_k \in \bar{\Gamma}_j \cup \bar{\Gamma}_{n_2(m)+1} \right.$$
$$\left. \text{для всех } 0<k<n \mid u^{(m)}_0 = \big(i,\ n_2(m)+1\big) \right\},$$

откуда, применив формулу полной вероятности и воспользовавшись матричной записью, получаем формулу V.

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{s} q_{\left(i',\ n_2(m)+1\right)(i,\ j)}(m) = 1 \qquad (i' = \overline{1,\ s}). \tag{5.8}$$

Лемма 5.5. *Обозначим*

$$\hat{T}_N = T_N T_{N-1} \cdot \ldots \cdot T_{j+1} = (\hat{t}^{(N)}_{il})^s_{i,l=1}.$$

Если выполняются

$$0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_{il}(k) < 1, \tag{5.9}$$

тогда существует предел:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\hat{t}^{(N)}_{il}}{\hat{t}^{(N)}_{id}} = \gamma_{ld} \qquad (0<j<+\infty). \tag{5.10}$$

Доказательство. Пусть

$$\max_{1\leqslant i\leqslant s} \left\{ \frac{\hat{t}^{(N)}_{il}}{\hat{t}^{(N)}_{id}} \right\} = \frac{\bar{t}^{(N)}_{l}}{\bar{t}^{(N)}_{d}}, \quad \min_{1\leqslant i\leqslant s} \left\{ \frac{\hat{t}^{(N)}_{il}}{\hat{t}^{(N)}_{id}} \right\} = \frac{\underline{t}^{(N)}_{l}}{\underline{t}^{(N)}_{d}},$$

где

$$\bar{t}^{(N)}_r,\ \underline{t}^{(N)}_r \in \{ \hat{t}^{(N)}_{ir} : 1 \leqslant i \leqslant s \}, \quad r = l,\ d.$$

Из определения $\hat{T}_N$ имеем:

$$\hat{t}^{(j+1)}_{il} = \alpha_{il}(j+1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\hat{t}^{(N+1)}_{il} = \sum_{e=1}^{s} \alpha_{ie}(N+1)\, \hat{t}^{(N)}_{el},$$

откуда следует

$$t^{(N)}_{il} \geqslant (s\,\alpha_0)^{N-j-1} \cdot \alpha_0 \qquad \big(\alpha_0 \cdot s < 1\big)$$

и

$$\frac{\tilde t_l^{(N)}}{\tilde t_d^{(N)}} > \frac{\hat t_{il}^{(N+1)}}{\hat t_{id}^{(N+1)}} > \frac{t_{-l}^{(N)}}{t_{-d}^{(N)}}. \tag{5.11}$$

Рассмотрим функцию

$$y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} t_i \hat t_{il}^{(N)}}{\sum\limits_{i=1}^{s} t_i \hat t_{id}^{(N)}}$$

от аргументов $\{t_i\}_{i=1}^{s}$ в области $D = \left\{ t_i : t_i \geqslant \alpha_0, \sum\limits_{i=1}^{s} t_i \leqslant 1 \right\}$. Эта функция в D непрерывна и монотонна по каждому t_i при фиксированных остальных, поэтому она принимает наибольшее и наименьшее значения на контуре $\sum\limits_{i=1}^{s} t_i = 1$, откуда получаем, что существуют

$$\tilde t_r^{(N)}, \ \tilde{\tilde t}_r^{(N)} \in \{ \hat t_{il}^{(N)} : 1 \leqslant i \leqslant s \} \qquad (r = l, \ d)$$

и выполняются неравенства

$$\frac{\tilde t_l^{(N)}(1-\alpha_0) + \tilde{\tilde t}_l^{(N)} \cdot \alpha_0}{\tilde t_d^{(N)}(1-\alpha_0) + \tilde{\tilde t}_d^{(N)} \cdot \alpha_0} > \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} t_i \cdot \hat t_{il}^{(N)}}{\sum\limits_{i=1}^{s} t_i \cdot \hat t_{id}^{(N)}} > \frac{\tilde t_l^{(N)} \cdot \alpha_0 + \tilde{\tilde t}_l^{(N)}(1-\alpha_0)}{\tilde t_d^{(N)} \cdot \alpha_0 + \tilde{\tilde t}_d^{(N)}(1-\alpha_0)},$$

из чего получаем

$$\left| \frac{\tilde t_l^{(N+1)}}{\tilde t_d^{(N+1)}} - \frac{t_{-l}^{(N+1)}}{t_{-d}^{(N+1)}} \right| < \left| \frac{\tilde t_l^{(N)}(1-\alpha_0) + \tilde{\tilde t}_l^{(N)} \alpha_0}{\tilde t_d^{(N)}(1-\alpha_0) + \tilde{\tilde t}_d^{(N)} \alpha_0} - \frac{\tilde t_l^{(N)} \cdot \alpha_0 + \tilde{\tilde t}_l^{(N)}(1-\alpha_0)}{\tilde t_d^{(N)} \cdot \alpha_0 + \tilde{\tilde t}_d^{(N)}(1-\alpha_0)} \right| <$$

$$< \left| \frac{\tilde t_l^{(N)}}{\tilde t_d^{(N)}} - \frac{\tilde{\tilde t}_l^{(N)}}{\tilde{\tilde t}_d^{(N)}} \right| \cdot \frac{1-\alpha_0^2}{1+\alpha_0^2} \leqslant \left| \frac{\tilde t_l^{(N)}}{\tilde t_d^{(N)}} - \frac{t_{-l}^{(N)}}{t_{-d}^{(N)}} \right| \cdot \frac{1-\alpha_0^2}{1+\alpha_0^2}. \tag{5.12}$$

Так как

$$1 > \frac{1-\alpha_0^2}{1+\alpha_0^2} > 0,$$

то в силу (5.11) и (5.12) следует доказательство леммы.

Обозначим

$$\hat T_N^{(m)} = T_N^{(m)} \cdot T_{N-1}^{(m)} \cdot \ldots \cdot T_{j+1}^{(m)} = \left(t_{il}^{(N)}(m) \right)_{i, l=1}^{s} \qquad \left(n_2(m) + 1 > N \right).$$

Лемма 5.6. *Если существует* (5.10), *тогда*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{t_{il}^{(N)}(m)}{t_{id}^{(N)}(m)} = \gamma_{ld}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\lim\limits_{m \to \infty} n_2(m) = \infty$, то в силу свойства I настоящего параграфа и определения $\left(t_{il}^{(N)}(m) \right)_{i, l=1}^{s}$ имеем

$$t_{il}^{(N)}(m) \leqslant t_{il}^{(N)}(m+1) < 1 \tag{5.13}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} t_{il}^{(N)}(m)=\hat{t}_{il}^{(N)},$$

откуда следует:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{t_{il}^{(N)}(m)}{t_{id}^{(N)}(m)}=\frac{\hat{t}_{il}^{(N)}}{\hat{t}_{id}^{(N)}}. \tag{5.14}$$

Теперь в силу (5.11), (5.13) и (5.14) можно записать

$$\lim_{N\to\infty} \frac{t_{il}^{(N)}(m)}{t_{id}^{(N)}(m)}=\lim_{N\to\infty}\lim_{m\to\infty} \frac{t_{il}^{(N)}(m)}{t_{id}^{(N)}(m)}=\gamma_{ld}.$$

Итак, лемма доказана.

Лемма 5.7. *Пусть стохастическая матрица T представима в виде*

$$T=T'\cdot T'',$$

где $T'=(\alpha'_{il})_{i,l=1}^s$, $T''=(\alpha''_{il})_{i,l=1}^s$ $\alpha'_{il}\geqslant 0$, $\alpha''_{il}\geqslant 0$ *и*

$$\sum_{l=1}^{s}\alpha'_{il}<1, \qquad i=\overline{1,\ s},$$

тогда существуют положительные и при этом единственные числа $\{a_i\}_{i=1}^s$, *при которых матрицы* $\bar{T}'=(\alpha'_{il}\cdot a_l)_{i,l=1}^s$ *и* $\bar{T}''=\left(\frac{1}{a_i}\cdot\alpha''_{il}\right)_{i,l=1}^s$ *стохастические и* $T=\bar{T}'\cdot\bar{T}''$.

Доказательство. Пусть $T=(\beta_{il})_{i,l=1}^s$, тогда

$$\beta_{il}=\sum_{k=1}^{s}\alpha'_{ik}\cdot\alpha''_{kl} \qquad (i,\ l=\overline{1,\ s})$$

и

$$\sum_{l=1}^{s}\beta_{il}=\sum_{k=1}^{s}\alpha'_{ik}\left(\sum_{l=1}^{s}\alpha''_{kl}\right),$$

откуда следует, что если T'' — стохастическая матрица, тогда и T' также стохастическая и, кроме того, если взять

$$\sum_{l=1}^{s}\alpha''_{kl}=a_k \qquad (k=\overline{1,\ s}),$$

получим доказательство леммы.

Теорема 5.1. *Если выполняется условие* (5.9), *тогда существует предел*

$$\lim_{m\to\infty} q_{(i,\ n_2(m)+1)\,(l,\ j)}=q_{(l,\ j)}(\infty),$$

не зависящий от функции $n_1(m)$ *и* $n_2(m)$.

Доказательство. Так как

$$T^{(m)}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(T'_m)^n\right)\cdot T''_m,$$

то в силу леммы

$$\bar{T}''_m=\left(\frac{1}{a_i^{(m)}}\, t_{il}^{(m)}\right)_{i,\,l=1}^{s}, \quad \bar{T}'_m=(g_{il}^{(m)}\, a_l^{(m)}),$$

где $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(T_m)^n\right)=(g_{il}^{(m)})_{i,\,l=1}^{s}$, $a_i^{(m)}=\sum\limits_{l=1}^{s} t_{il}^{(m)}$ – стохастические.

С другой стороны,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{t_{il}^{(m)}\,a_i^{(m)}}{t_{id}^{(m)}\,a_i^{(m)}}=\lim_{N\to\infty}\frac{t_{il}^{(N)}(m)}{t_{id}^{(N)}(m)}=\gamma_{ld}(N=n_2(m)+1),$$

откуда следует

$$\lim_{m\to\infty}\frac{t_{il}^{(m)}}{a_i^{(m)}}=t_l$$

и

$$\lim_{m\to\infty}\bar{T}''_m=T''_0=(\nu''_{il})_{i,\,l=1}^{s},$$

где

$$\nu''_{il}=t_l \qquad (i,\ l=\overline{1,\ s}).$$

Так как $\bar{T}'_m=\left(\nu'_{il}(m)\right)_{i,\,l=1}^{s}$ – стохастическая матрица, то можно выбрать возрастающую подпоследовательность натуральных чисел $\{m'_m\}_{m=1}^{\infty}$, чтобы имело место

$$\lim_{m'\to\infty}\nu'_{il}(m')=\nu'_{il}\geqslant 0$$

и

$$\lim_{m'\to\infty}\bar{T}'_{m'}=(\nu'_{il})_{i,\,l=1}^{s},$$

откуда следует

$$\lim_{m'\to\infty}T^{(m')}=(\nu'_{il})_{i,\,l=1}^{s}\cdot(\nu''_{il})_{i,\,l=1}^{s}=(\nu_{il})_{i,\,l=1}^{s},$$

где

$$\nu_{il}=\left(\sum_{k=1}^{s}\nu'_{ik}\right)t_l=t_l.$$

Имея в виду, что

$$\lim_{m\to\infty}q_{(i,\,n_2(m)+1)\,(l,\,j)}(m)=t_l=q_{(l,\,j)}(\infty),$$

получаем доказательство теоремы.

Теорема 5.2. *Если выполнено* (5.9), *тогда существует единственный вектор* $\varkappa_j^{(\infty)}$, *удовлетворяющий*

$$\lim_{m\to\infty}\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}{}^{(m)}_{(m)})=\{\varkappa_j^{(\infty)}\},$$

и, кроме того, он имеет вид:

$$\varkappa_j^{(\infty)}=\Big(\eta\left((1,\ j)\right),\ \ldots,\ \eta\left((s,\ j)\right)\Big),$$

где $\{\eta(a): a\in\bar{\Gamma}_j\}$ вычисляется с помощью системы стохастических уравнений:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\sum\limits_{a\in\bar{\Gamma}_j} \eta(a)\left(q_{ab}(\infty)+Q_a\cdot q_b(\infty)\right)=\eta(b) & (b\in\bar{\Gamma}_j), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\sum\limits_{a\in\bar{\Gamma}_j} \eta(a)=1. &
\end{array}
\right. \tag{5.15}
$$

Доказательство. В случае возвратности $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ величины $Q_a\equiv 0$, и доказательство теоремы получается из следствия 5.1 (даже без применения условия (5.9)).

Если $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ невозвратна, тогда можно выбрать возрастающую подпоследовательность натуральных чисел $\{m'_m\}_{m=1}^{\infty}$, чтобы имело место

$$\lim_{m'\to\infty} q_{(i,\,j)\,(l,\,n_s(m')+1)}(m')=q_{(i,\,j)l}.$$

Теперь аналогично доказательству следствия 5.1 получаем

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\sum\limits_{a\in\bar{\Gamma}_j} \eta(a)\,q_{ab}(\infty)+q_b(\infty)\sum\limits_{i=1}^{s}\bar{\eta}(i)=\eta(b) & (b\in\bar{\Gamma}_j), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\sum\limits_{a\in\bar{\Gamma}_j} \eta(a)\,q_{a,\,l}=\bar{\eta}(l) & (l=\overline{1,\ s}), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\sum\limits_{a\in\bar{\Gamma}_j} \eta(a)=1, &
\end{array}
\right. \tag{5.16}
$$

где $\{\bar{\eta}(i): i=\overline{1,\ s}\}$ — вспомогательные неизвестные, смысл введения которых очевиден.

Выключив $\{\bar{\eta}(i)\}_{i=1}^{s}$ из (5.16), получаем (5.15), откуда в силу леммы 5.3 следует доказательство теоремы.

Замечание 5.1. Условие (5.9) для теоремы 5.2 несущественно и использовано лишь для упрощения доказательства теоремы. Кроме того, ограничение (5.9) довольно общее и легко проверяется (например, можно оценить соответствующие вероятности снизу).

Для того чтобы в общем случае теорема 5.2 (в несколько измененном виде) имела место, достаточно, чтобы состояния цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ составляли один существенный класс.

Доказательства этой модификации мы не приводим и пользоваться ею в дальнейшем не будем.

§ 6. Преобразование простых марковских цепей в непрерывные

Цель этого параграфа — описать способ эквивалентного преобразования простых цепей в непрерывные, так как для них критерии положительности состояний получаются в наиболее простой форме (например, теорема 1.1).

Опишем одно полезное для нас преобразование, которое назовем „вставлением дополнительных состояний“.

Пусть имеем марковскую цепь $(x_n, n\geqslant 0)$ со счетным числом состояний E. Фиксируем состояние $\{a\}$ и через S обозначим $S=\{b_i: b_i\in E,\ p_{ab_i}>0\}_{i=1}^{m_a}$, где

$$p_{ab}=P\{x_{n+1}=b\mid x_n=a\}.$$

Предположим, что

$$m_a<+\infty. \tag{6.1}$$

Выберем целые числа $0<r<m_a$ и $0<r_i<r$ (где $i=\overline{1,r}$) так, что

$$\sum_{i=1}^{r} r_i\leqslant m_a,$$

и образуем пары чисел $\{(i,j)\}=\hat{S}$, где $i=\overline{1,r}$ и $j=\overline{1,r_i}$. Сопоставим с каждой парой (i,j) любые состояния $b_i\in S$ таким образом, чтобы каждое состояние из S принадлежало одной паре чисел (i,j) и каждая пара $(i,j)\in\hat{S}$ имела хотя бы одно состояние из S, что, очевидно, возможно в силу определения пар (i,j). Совокупность состояний, которые присоединены к паре (i,j), обозначим через $S(i,j)$.

Образуем обрывающуюся марковскую цепь $(x_n^{(a)}, n\geqslant 0)$ в фазовом пространстве $E^{(a)}=\{a\}\cup\hat{S}$ с границей S и обозначим условные вероятности перехода через один шаг:

$$q_{sd}=P\{x_{n+1}^{(a)}=d\mid x_n^{(a)}=s\}=\begin{cases} >0, \text{ если } s=a,\ d=(i,1),\ i=\overline{1,r},\\ >0, \text{ если } s=(i,1),\ d=a,\ i=\overline{1,r},\\ >0, \text{ если } s=(i,j),\ d=(i,j+1),\ 1\leqslant j<r_i,\\ >0, \text{ если } s=(i,j+1),\ d=(i,j),\ j=\overline{1,\ r_i-1}\\ >0, \text{ если } s=(i,j),\ d=b,\ b\in S(i,j),\\ =1, \text{ если } d=s=b,\ b\in S,\\ \equiv 0 \text{ во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Состояния $(i,j)\in\hat{S}$ назовем вставленными.

С $(x_n^{(a)}, n\geqslant 0)$ можно обычным способом связать совокупность гармонических функций $\{f(d): d\in E^{(a)}\cup S\}$.

Так как роль границы играет множество S, то существует система базовых гармонических функций $\{f_b(d): d\in E^{(a)}\cup S,\ b\in S\}$.

Лемма 6.1. *Существует совокупность условных вероятностей* $\{q_{cd}: c, d\in E^{(a)}\cup S\}$, *которые определяют марковскую цепь* $(x_n^{(a)}, n\geqslant 0)$, *и при них имеет место*

$$f_b(a)=\frac{p_{ab}}{1-p_{aa}}\ (b\in S).$$

Доказательство. Воспользовавшись методом вычисления базовых гармонических функций, описанным в § 3, получаем систему уравнений:

$$
\begin{cases}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x(a) = \sum_{i=1}^{r} x\big((i,\ 1)\big)\cdot q_{\langle i,\ 1\rangle\, a} + 1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x\big((i,\ 1)\big) = x(a)\, q_{a\,\langle i,\ 1\rangle} + x\big((i,\ 2)\big)\, q_{\langle i,\ 2\rangle\,\langle i,\ 1\rangle} \qquad (i=\overline{1,\ r}), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x\big((i,\ j_i)\big) = x\big((i,\ j_i-1)\big)\cdot q_{\langle i,\ j_i-1\rangle\,\langle i,\ j_i\rangle} + \\
+ x\big((i,\ j_i+1)\big)\, q_{\langle i,\ j_i+1\rangle\,\langle i,\ j_i\rangle} \qquad (2\leqslant j_i < r_i,\ i=\overline{1,\ r}), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x\big((i,\ r_i)\big) = x\big((i,\ r_i-1)\big)\, q_{\langle i,\ r_i-1\rangle\,\langle i,\ r_i\rangle} \qquad (i=\overline{1,\ r}), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_b(a) = x(b) = x\big((i,\ j_i)\big)\cdot q_{\langle i,\ j_i\rangle\, b} \qquad \big(b\in S(i,\ j),\ i=\overline{1,\ r},\ j_i=\overline{1,\ r_i}\big), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

где $x(b) = K(a,\ b)$, т.е. функция Грина. Будем искать $\{q_{cd} : c,\ d\in E^{(a)} \cup S\}$.

Пусть $\Big\{x(a),\ x\big((i,\ j)\big) : (i,\ j)\in \hat{S}\Big\}$ известны, тогда получаем

$$q_{\langle i,\ j\rangle\, b} = \frac{f_b(a)}{x\big((i,\ j)\big)} \qquad \big(b\in S(i,\ j),\ i=\overline{1,\ r},\ j=\overline{1,\ r_i}\big), \tag{6.3}$$

$$q_{\langle i,\ r_i\rangle\,\langle i,\ r_i-1\rangle} = 1 - \frac{1}{x\big((i,\ r_i)\big)}\cdot \sum_{b\in S(i,\ r_i)} f_b(a) \qquad (i=\overline{1,\ r}), \tag{6.4}$$

$$q_{\langle i,\ j\rangle\,\langle i,\ j+1\rangle} = \frac{x\big((i,\ j+1)\big) - x\big((i,\ j+2)\big)\, q_{(i,\ j+2)\,(i,\ j+1)}}{x\big((i,\ j)\big)}$$
$$(i=\overline{1,\ r};\ j=\overline{1,\ r_i}-1), \tag{6.5}$$

где

$$q_{\langle i,\ r_i+1\rangle\,\langle i,\ r_i\rangle} \equiv 0,\quad q_{(i,\ r_i+2)\,(i, r_i)} \equiv 0,$$

$$q_{\langle i,\ j\rangle\,\langle i,\ j-1\rangle} = 1 - \sum_{b\in S(i,\ j)} q_{\langle i,\ j\rangle\, b} - q_{\langle i,\ j\rangle\,\langle i,\ j+1\rangle} \qquad (i=\overline{1,\ r};\ j=\overline{1,\ r_i}), \tag{6.6}$$

если отождествлять состояние $(i,\ 0)$ с состоянием a и

$$q_{a\,\langle i,\ 1\rangle} = \frac{x\big((i,\ 1)\big) - x\big((i,\ 2)\big)\, q_{(i,\ 2)\,(i,\ 1)}}{1 + \sum_{k=1}^{r} x\big((k,\ 1)\big)\cdot q_{(k,\ 1)\, a}}. \tag{6.7}$$

Имеет место тождество:

$$\sum_{k=1}^{r}\Big(x\big((k,\ 1)\big) - x\big((k,\ 2)\big)\, q_{\langle k,\ 2\rangle\,\langle k,\ 1\rangle}\Big) = 1 + \sum_{k=1}^{r} x\big((k,\ 1)\big)\, q_{\langle k,\ 1\rangle\, a}, \tag{6.8}$$

справедливость которого проверяется с помощью прямой подстановки в (6.8) выражения $\{q_{sd}\}$ из (6.3), ..., (6.7) и формулы

$$\sum_{b\in S} f_b(a)=1,$$

откуда в силу (6.7) следует, что

$$\sum_{i=1}^{r} q_{a(i,\,1)}=1.$$

Из (6.3), ..., (6.6) видно, что если $x\left((i,\,j)\right)$ подобраны следующим образом:

$$x\left((i,\ r_i)\right)>\sum_{b\in S(i,\,r_i)} f_b(a) \qquad (i=\overline{1,\ r}), \tag{6.9}$$

$$x\left((i,\ j)\right)>\sum_{b\in S(i,\,j)} f_b(a)+x\left((i,\ j+1)\right)-$$

$$-x\left((i,\ j+2)\right) q_{(i,\,j+2)\,(i,\,j+1)} \qquad (i=\overline{1,\ r};\ j=\overline{1,\ r_i-1}), \tag{6.10}$$

а $x\,(a)$ вычислено по формуле

$$x\,(a)=\sum_{i=1}^{r} x\left((i,\ 1)\right) q_{(i,\,1)\,a}+1,$$

то существует решение $\{q_{sd}\}$ исследуемой системы уравнений, являющихся условными вероятностями перехода через один шаг марковской цепи $(x_n^{(a)},\ n\geqslant 0)$.

Доказательство закончено.

Из § 2 и 4 следует, что марковская цепь $(x_n'',\ n\geqslant 0)$, определенная в $E\cup\hat{S}$ с помощью условных вероятностей

$$\tilde{p}_{sd}=\boldsymbol{P}\{x_{n+1}''=d\mid x_n''=s\}=\begin{cases} p_{sd}, & \text{если } s\in E\setminus\{a\},\ \ d\in E,\\ q_{sd}, & \text{если } s\in\{a\}\cup\hat{S},\ \ d\in E\cup\hat{S},\\ 0 & \text{во всех остальных случаях,}\end{cases}$$

эквивалентна $(x_n,\ n\geqslant 0)$, так как последняя отличается от вложенной цепи I типа в $(x_n'',\ n\geqslant 0)$ только преобразованием, описанным в лемме 2.1.

Таким образом, можно расширять фазовое пространство, соблюдая эквивалентность марковских цепей.

Теорема 6.1. *Каждую простую марковскую цепь можно эквивалентно преобразовать в непрерывную.*

Доказательство. Пусть $(x_n^{(E)},\ n\geqslant 0)$ – простая марковская цепь в фазовом пространстве $E=\{(i,j)\,:\,i=\overline{1,\ s},\ j=0,\ 1, 2,\ \ldots\}$. Если каждое состояние (i,j) сопоставить с числом m по формуле $m=s\cdot j+i$ и обозначить через $B=\{1, 2,\ \ldots\}$, тогда можно считать, что $(x_n^{(E)},\ n\geqslant 0)$ задана в B и писать $(x_n^{(B)},\ n\geqslant 0)$ вместо $(x_n^{(E)},\ n\geqslant 0)$.

Очевидно, $(x_n^{(B)},\ n\geqslant 0)$ – простая марковская цепь и эквивалентна цепи $(x_n^{(E)},\ n\geqslant 0)$.

Для каждого состояния n обозначим

$$S_n=\{m:p_{nm}>0\},$$

где

$$p_{nm}=P\{x_{k+1}^{(B)}=m \mid x_k^{(B)}=n\}$$

и

$$|\max_{m\in S_n}(m-n)|=l_n'', \quad |\min_{m\in S_n}(m-n)|=l_n'.$$

Положим $r=2$, $r_1=l_n'$, $r_2=l_n''$. Образуем пары чисел

$$\hat{S}=\{(1, j)\}_{j=1}^{l_n'} \cup \{(2, j)\}_{j=1}^{l_n'}.$$

С $(1, j)$ сопоставим состояние $n-j$, а с $(2, j)$ – состояние $n+j$.

Вычислим соответствующие условные вероятности перехода через один шаг дополнительных состояний с помощью вышеописанного способа*).

В результате, соответственно пронумеровав состояния расширенного фазового пространства, получим непрерывную марковскую цепь $(\bar{x}_n, n\geqslant 0)$, эквивалентную цепи $(x_n^{(E)}, n\geqslant 0)$. Теорема доказана.

Заметим, что это преобразование простой марковской цепи в непрерывную не единственно.

В общем случае $(\bar{x}_n, n\geqslant 0)$ получается довольно сложной, поэтому иногда ее можно упростить, отождествляя некоторые состояния в одно состояние.

Пусть имеем непрерывную марковскую цепь $(x_n^{(\hat{E})}, n\geqslant 0)$ на фазовом пространстве $\hat{E}=\bigcup_{n=0}^{\infty}(A\times\{n\})$ и пусть отождествим состояния (i_1, j_1), (i_2, j_2), … …, (i_k, j_k) с соответствующими – (l_1, j_1), …, (l_k, j_k), тогда, если получим опять марковскую цепь $(\tilde{x}_n, n\geqslant 0)$, то в силу следствия 5.2 она будет эквивалентна исходной.

Для марковской цепи после отождествления достаточно, чтобы выполнялось

$$p_{(i_k, j_k)\,d}=p_{(l_k, j_k)\,d},$$

когда $d\neq(i_k, j_k)$, (l_k, j_k), а при $d=(i_k, j_k)$, (l_k, j_k), $p_{(i_k, j_k)d}$ и $p_{(l_k, j_k)d}$ – любые.

Если состояние, получившееся после отождествления (i_m, j_m) с (l_m, j_m), обозначить через (i_m, j_m), то условные вероятности перехода новой марковской цепи $(\tilde{x}_n, n\geqslant 0)$ будут иметь вид:

$$p_{cd}=P\{\tilde{x}_{n+1}=d \mid \tilde{x}_n=c\}=$$

$$=\begin{cases} p_{cd}, & \text{если } d,\ c\,\bar{\in}\,\{(i_m, j_m), (l_m, j_m): m=\overline{1, k}\},\\ p_{(i_m, j_m)\,d}, & \text{если } c=(i_m, j_m),\ d\neq(i_m, j_m), (l_m, j_m),\\ p_{(i_m, j_m)(i_m, j_m)}+p_{(i_m, j_m)(l_m, j_m)}, & \text{если } c=d=(i_m, j_m).\end{cases}$$

*) Если $p_{nm'}=0$, где $n>m'>n-l_n'$ или $n<m'<n+l_n''$, тогда положим $q_{(i, j)\,m'}=0$, где m сопоставлено с парой чисел (i, j), так как дальнейшие вычисления от этого не меняются.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
1.XI.1971

Литература

1. Чжун Кай-Лай, Однородные цепи Маркова, М., „Мир", 1964.
2. Ф. Спицер, Принципы случайного блуждания, М., „Мир", 1969.
3. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, Введение в теорию массового обслуживания, М., „Наука", 1966.
4. Е. Б. Дынкин, Граничная теория марковских процессов (дискретный случай), Успехи матем. наук, XXIV, вып. 2(146) (1969), 3–43.
5. Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, М., Физматгиз, 1963.
6. С. Карлин, Основы теории случайных процессов, М., „Мир", 1971.
7. В. А. Малышев, Случайные блуждания, уравнения Винера–Хопфа в четверти плоскости, автоморфизмы Галуа (препринт), изд. МГУ, 1970.
8. I. L. Doob, Discrete potential theory and boundaries, Journal of mathematics and mechanics, 8 (3) (1955), 433–458.

HOMOGENINIŲ MARKOVO GRANDINIŲ, DEFINUOTŲ SPECIALIOJE FAZINĖJE ERDVĖJE, ERGODIŠKUMO KRITERIJAI. II

Z. Navickas

(*Reziumė*)

Darbe siūlomi nauji homogeninių Markovo grandinių, definuotų specialioje fazinėje erdvėje, būsenų teigiamumo kriterijai, išreikšti sąlyginių perėjimo per vieną žingsnį tikimybių terminais.

Šioje darbo dalyje nagrinėjamos harmoninių funkcijų, surištų su tiriamos grandinės fragmentais, savybės ir aprašomas būdas, kaip galima vieno tipo Markovo grandinę perdirbti į kito tipo, nekeičiant jos ergodiškumo.

THE CRITERIA FOR THE ERGODICITY OF THE HOMOGENEOUS MARKOV CHAINS WITH SPECIAL PHASE SPACE. II

Z. Navickas

(*Summary*)

The paper presents some new criteria in terms of one-step transition probabilities (see 1.18) for the ergodicity of homogeneous Markov chains with the special phase space.

In the second part of the paper the properties of harmonic functions connected with segments of the chain concerned are investigated. We describe a method of ergodicity preserving transformation of one type chain to another.