1972

УДК 519.21

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ СО СЛУЧАЙНЫМ ЧИСЛОМ СЛУЧАЙНЫХ СЛАГАЕМЫХ

А. Накас

Рассматривается последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots,$$

с функцией распределения

$$\mathbf{P}\{\xi_1 < x\} = F(x),$$

математическим ожиданием $\mathbf{M}\xi_1 = 0$ и дисперсией $\mathbf{D}\xi_1 = 1$.

Пусть η случайное число слагаемых, не зависящих от ξ_j,

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} = p_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{M}\eta = \alpha, \quad \mathbf{D}\eta = \gamma^2,$$

$$S_\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\eta.$$

Предположим, что $\alpha < \infty$ и $\gamma < \infty$. Очевидно, что $\mathbf{M}S_\eta = 0$, $\mathbf{D}S_\eta = \alpha$.

Рассмотрим нормированную сумму

$$Z_\eta = \frac{S_\eta}{\sqrt{\alpha}} \tag{1}$$

с функцией распределения

$$F_{Z_\eta}(x) = \mathbf{P}\left\{\frac{S_\eta}{\sqrt{\alpha}} < x\right\}.$$

В случае такого нормирования С. Х. Сираждинов, М. Маматов, Ш. К. Форманов [3] доказали, что, если

$$\mathbf{M}\xi_1 = 0, \quad \mathbf{D}\xi_1 = 1, \quad \mathbf{M}|\xi_1|^3 = \beta_3 < \infty,$$

то

$$|F_{Z_\eta}(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{C_1 \beta_3}{(1+|x|)^3 \sqrt{\alpha}} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\gamma^2}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right),$$

где C_1 – абсолютная константа. Теорема доказывается методом сверток. В. Паулаускас [2], рассматривая аналогичную теорему для многомерного распределения, показал, что в ранее написанном неравенстве член $\gamma^2/\alpha\sqrt{\alpha}$ необязателен. По-видимому, в нашем случае отказаться от этого члена нельзя.

А. Бикялис [1], пользуясь последними результатами К. Эссеена [4], показал, что существует такая абсолютная константа C_2, при которой справедливо неравенство

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_2}{(1+|x|)^3\sqrt{n}} \sup_{0<z\leqslant(1+|x|)\sqrt{n}} \left[\left|\int\limits_{|u|\leqslant z} u^3\,dF(u)\right|+z\int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\,dF(u)\right]. \quad (2)$$

В данной заметке доказывается, что результат А. Бикялиса можно распространить для сумм со случайным числом слагаемых. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Существует такая абсолютная константа C, что*

$$|F_{Z_\eta}(x)-\Phi(x)|\leqslant \frac{C}{(1+|x|)^3\sqrt{\alpha}}\left(1+\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\gamma^2}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)\cdot$$
$$\cdot \sup_{0<z\leqslant(1+|x|)\sqrt{\alpha}} \left[\left|\int\limits_{|u|\leqslant z} u^3\,dF(u)\right|+z\int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\,dF(u)\right], \quad (3)$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Замечание. *В частном случае, когда* $\mathbf{P}\{\eta=n\}=1$, *получаем результат А. Бикялиса.*

Через C_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$ обозначим абсолютные константы, ввод которых при доказательстве отдельно не будет оговорен.

Доказательство. Воспользуемся методом сверток. Заметим, что

$$F_{Z_k}(x)=\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k}{\sqrt{\alpha}}<x\right\}=$$
$$=\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k}{\sqrt{k}}<\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\,x\right\}=F^{*k}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\,x\right),$$

где знак $*k$ обозначает k-ю свертку F.

Заметим, что

$$F_{Z_\eta}(x)=\sum_{k=1}^{\infty} p_k F^{*k}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\,x\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty} p_k\left[F^{*k}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\,x\right)-\Phi(x)\right]+\sum_{k=1}^{\infty} p_k\,\Phi(x)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty} p_k\left[F^{*k}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\,x\right)-\Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\,x\right)\right]+\sum_{k=1}^{\infty} p_k\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\,x\right)-\Phi(x)\right]. \quad (4)$$

Из (4) следует, что

$$|F_{Z_\eta}(x)-\Phi(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty} p_k\left|F^{*k}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\,x\right)-\Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\,x\right)\right|+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} p_k\left|\Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\,x\right)-\Phi(x)\right|. \quad (5)$$

Сначала оценим сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \left| F^{*k}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right)\right|.$$

Для ее оценки воспользуемся неравенством (2):

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \left| F^{*k}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k C_3}{\left(1+\sqrt{\frac{\alpha}{k}}|x|\right)^3 \sqrt{k}} \sup_{0<z\leqslant\left(1+\sqrt{\frac{\alpha}{k}}|x|\right)\sqrt{k}} \left[\left|\int\limits_{|u|\leqslant z} u^3\, dF(u)\right| + \right.$$

$$\left. + z \int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\, dF(u)\right]. \tag{6}$$

Неравенство (6) перепишем так:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \left| F^{*k}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right)\right| \leqslant \frac{C_3}{\alpha\sqrt{\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3} \cdot$$

$$\cdot \sup_{0<z\leqslant\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)\sqrt{\alpha}} \left|\int\limits_{|u|\leqslant z} u^3\, dF(u)\right| + \frac{C_3}{\alpha\sqrt{\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{a}}+|x|\right)^3} \cdot$$

$$\cdot \sup_{0<z\leqslant\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)\sqrt{\alpha}} z \int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\, dF(u). \tag{7}$$

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \left| F^{*k}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right)\right| = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}} \sum_{k<\alpha} \frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3} \sup_{0<z\leqslant\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)\sqrt{\alpha}} \left|\int\limits_{|u|\leqslant z} u^3\, dF(u)\right|, \tag{8}$$

$$I_2 = \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}} \sum_{k\geqslant\alpha} \frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3} \sup_{0<z\leqslant\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)\sqrt{\alpha}} \left|\int\limits_{|u|\leqslant z} u^3\, dF(u)\right|, \tag{9}$$

$$I_3 = \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}} \sum_{k<\alpha} \frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3} \sup_{0<z\leqslant\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)\sqrt{\alpha}} z \int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\, dF(u), \tag{10}$$

$$I_4 = \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}} \sum_{k\geqslant\alpha} \frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3} \sup_{0<z\leqslant\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)\sqrt{\alpha}} z \int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\, dF(u). \tag{11}$$

Оценим каждую сумму I_j $(j=1, 2, 3, 4)$ отдельно.

Оценка суммы I_4. Для сокращения записей введем следующие обозначения:

$$a = (1+|x|)\sqrt{\alpha}, \tag{12}$$

$$b_k = \left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)\sqrt{\alpha}. \tag{13}$$

Тогда

$$I_4=\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}\sum_{k\geqslant\alpha}\frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3}\sup_{0<z\leqslant b_k} z\int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\,dF(u)\leqslant J_1+J_2,$$

где

$$J_1=\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}\sup_{0<z<a} z\int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\,dF(u)\sum_{k\geqslant\alpha}\frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3}, \tag{14}$$

$$J_2=\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}\sum_{k\geqslant\alpha}\frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3}\sup_{a\leqslant z\leqslant b_k} z\int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\,dF(u). \tag{15}$$

Так как при $k\geqslant\alpha$ всегда $a\leqslant b_k$, то из (14) получаем, что

$$J_1\leqslant\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}\sup_{0<z\leqslant a} z\int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\,dF(u)\cdot\frac{1}{(1+|x|)^3}\sum_{k\geqslant\alpha} p_k k. \tag{16}$$

Так как

$$\sum_{k\geqslant\alpha} p_k k\leqslant\alpha,$$

а также принимая во внимание (12), окончательно получаем, что

$$J_1\leqslant\frac{1}{(1+|x|)^3\sqrt{\alpha}}\sup_{0<z\leqslant(1+|x|)\sqrt{\alpha}} z\int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\,dF(u). \tag{17}$$

Рассмотрим J_2. После несложных рассуждений из (15) находим:

$$J_2\leqslant\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}\sum_{k\geqslant\alpha}\frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3} b_k\int\limits_{|u|\geqslant a} u^2\,dF(u)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}\sum_{k\geqslant\alpha}\frac{p_k k b_k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3 a}\sup_{0<z\leqslant a} z\int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\,dF(u)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(1+|x|)^3\sqrt{\alpha}}\sup_{0<z\leqslant(1+|x|)\sqrt{\alpha}} z\int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\,dF(u). \tag{18}$$

Из (17) и (18) получаем, что

$$I_4\leqslant\frac{2}{(1+|x|)^3\sqrt{\alpha}}\sup_{0<z\leqslant(1+|x|)\sqrt{\alpha}} z\int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\,dF(u). \tag{19}$$

Оценка суммы I_3. Согласно принятым нами обозначениям,

$$I_3=\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}\sum_{k<\alpha}\frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3}\sup_{0<z\leqslant b_k} z\int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\,dF(u). \tag{20}$$

Заметим, что при $k<\alpha$, $b_k<a$ можно переписать (20) в следующем виде:

$$I_3=\frac{1}{(1+|x|)^3\alpha\sqrt{\alpha}}\sum_{k<\alpha}\frac{p_k k(1+|x|)^3}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3}\cdot\sup_{0<z\leqslant b_k} z\int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\,dF(u). \tag{21}$$

Заметим, что, заменив b_k на a, мы только расширим интервал супремума. Поэтому вместо

$$\sup_{0<z\leqslant b_k} z\int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\,dF(u)$$

можно написать

$$\sup_{0<z\leqslant a} z \int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\, dF(u). \tag{22}$$

В неравенстве (21) рассмотрим сумму

$$\sum_{k<\alpha} \frac{p_k k(1+|x|)^3}{\alpha\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3}. \tag{23}$$

Оценим эту сумму относительно x:

а) когда $|x|\geqslant 1$, то

$$\sum_{k<\alpha} \frac{p_k k(1+|x|)^3}{\alpha\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3} \leqslant \sum_{k<\alpha} \frac{p_k k(2|x|)^3}{\alpha |x|^3} \leqslant 8; \tag{24}$$

б) когда $|x|<1$, то

$$\sum_{k<\alpha} \frac{p_k k(1+|x|)^3}{\alpha\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3} \leqslant 8 \sum_{k<\alpha} p_k \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{k}} =$$

$$=8\left[\sum_{k<\alpha} p_k\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}-1\right)+\sum_{k<\alpha} p_k\right] \leqslant 8\left[\sum_{k<\alpha} \frac{p_k|k-\alpha|}{\sqrt{\alpha}}+1\right].$$

Так как

$$\sum_{k<\alpha} p_k|k-\alpha| \leqslant \gamma,$$

то

$$\sum_{k<\alpha} \frac{p_k k(1+|x|)^3}{\alpha\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3} \leqslant 8\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}+1\right). \tag{25}$$

Из неравенств (21)—(25) получаем, что

$$I_3 \leqslant \frac{8}{(1+|x|)^3\sqrt{\alpha}}\left(1+\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}\right) \sup_{0<z\leqslant(1+|x|)\sqrt{\alpha}} z \int\limits_{|u|\geqslant z} u^2\, dF(u). \tag{26}$$

Оценка суммы I_1. Проводя аналогичные, как при оценке суммы I_3, рассуждения, получаем:

$$I_1 \leqslant \frac{8}{(1+|x|)^3\sqrt{\alpha}}\left(1+\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}\right) \sup_{0<z\leqslant(1+|x|)\sqrt{\alpha}} \left|\int\limits_{|u|\leqslant z} u^3\, dF(u)\right|. \tag{27}$$

Оценка суммы I_2. Неравенство (9) перепишем так:

$$I_2 \leqslant K_1+K_2,$$

где

$$K_1=\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}} \sum_{k\geqslant\alpha} \frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3} \sup_{0<z\leqslant a} \left|\int\limits_{|u|\leqslant z} u^3\, dF(u)\right|, \tag{28}$$

$$K_2=\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}} \sum_{k\geqslant\alpha} \frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3} \sup_{a\leqslant z\leqslant b_k} \left|\int\limits_{|u|\leqslant z} u^3\, dF(u)\right|. \tag{29}$$

Из (28) следует, что

$$K_1 \leqslant \frac{1}{(1+|x|)^3\sqrt{\alpha}} \sup_{0<z\leqslant(1+|x|)\sqrt{\alpha}} \left|\int\limits_{|u|\leqslant z} u^3\, dF(u)\right|. \tag{30}$$

Но

$$K_2 \leqslant \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}} \sum_{k\geqslant\alpha} \frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3} \sup_{a\leqslant z\leqslant b_k} \int_{|u|\leqslant z} |u|^3 dF(u) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}} \sum_{k\geqslant\alpha} \frac{p_k k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3} b_k \sup_{a\leqslant z\leqslant b_k} \int_{|u|\leqslant z} u^2 dF(u) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}} \sum_{k\geqslant\alpha} \frac{p_k k b_k}{\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^3 a} \sup_{0\leqslant z\leqslant a} z \int_{|u|\geqslant z} u^2 dF(u) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\geqslant\alpha} \frac{p_k k}{\alpha\left(\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+|x|\right)^2 (1+|x|)\sqrt{\alpha}} \sup_{0\leqslant z\leqslant a} z \int_{|u|\geqslant z} u^2 dF(u) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(1+|x|)^3\sqrt{\alpha}} \sup_{0\leqslant z\leqslant a} z \int_{|u|\geqslant z} u^2 dF(u). \tag{31}$$

Из (28), (30) и (31) следует, что

$$I_2 \leqslant \frac{1}{(1+|x|)^3\sqrt{\alpha}} \sup_{0<z\leqslant(1+|x|)\sqrt{\alpha}} \left[\left| \int_{|u|\leqslant z} u^3 dF(u)\right| + z \int_{|u|\geqslant z} u^2 dF(u)\right]. \tag{32}$$

Нам осталось оценить

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left| \Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right) - \Phi(x) \right|. \tag{33}$$

Оценку проведем, пользуясь известной теоремой Ю. В. Прохорова [5], которую запишем в таком виде:

$$\left| \Phi\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_2}\right) \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\sigma_2^2}\right\} \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1 \right|. \tag{34}$$

Перепишем (33) так:

$$L = L_1 + L_2,$$

где

$$L_1 = \sum_{k\leqslant\alpha} p_k \left| \Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right) - \Phi(x) \right|,$$

$$L_2 = \sum_{k>\alpha} p_k \left| \Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right) - \Phi(x) \right|.$$

Оценим каждую сумму L_1, L_2 отдельно.

Если $k \leqslant \alpha$ и $\sigma_1 = \sqrt{\frac{k}{\alpha}}$, $\sigma_2 = 1$, то, пользуясь неравенством (34), можно написать, что

$$L_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \sum_{k\leqslant\alpha} p_k \left| \sqrt{\frac{k}{\alpha}} - 1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \sum_{k\leqslant\alpha} p_k \frac{|k-\alpha|}{\sqrt{\alpha}\,(\sqrt{\alpha}+\sqrt{k})} \leqslant \frac{C_4}{(1+|x|)^3\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}. \tag{35}$$

Чтобы оценить сумму L_2, перепишем ее в таком виде:

$$L_2 = L_2' + L_2'',$$

где

$$L_2' = \sum_{\alpha \leqslant k \leqslant r} p_k \left| \Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right) - \Phi(x) \right|,$$

$$L_2'' = \sum_{k < r} p_k \left| \Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right) - \Phi(x) \right|,$$

$$r = \frac{x^2 \alpha}{12 \ln (2 + |x|)}.$$

Если $k \geqslant \alpha$, то $\sigma_2 = \sqrt{\frac{k}{\alpha}}$, $\sigma_1 = 1$ и из неравенства (34) следует, что

$$L_2' \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{\alpha \leqslant k \leqslant r} p_k \exp\left\{ -\frac{x^2 \alpha}{4k} \right\} \left| \frac{\sqrt{k} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{k}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{\alpha \leqslant k \leqslant r} p_k \exp\left\{ -\frac{x^2 \alpha}{4k} \right\} \left| \frac{\sqrt{k} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_5}{(1 + |x|)^3 \sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}. \tag{36}$$

Далее

$$L_2'' = \sum_{k \geqslant r} p_k \left| \Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\, x\right) - \Phi(x) \right| \leqslant \sum_{k \geqslant r} p_k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(r - \alpha)^2} \sum_{k > r} p_k (k - \alpha)^2 \leqslant \frac{1}{\left(\frac{x^2}{12 \ln (2 + |x|)} - 1 \right)^2 \alpha^2} \gamma^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_6}{(1 + |x|)^3 \sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha \sqrt{\alpha}}. \tag{37}$$

Из неравенств (5), (8–11), (19), (26), (27), (32), (35–37) следует (3). Теорема доказана полностью.

В заключение выражаем благодарность Б. А. Ряубе и проф. В. А. Статулявичюсу за постановку этой задачи и ряд ценных советов и указаний при ее выполнении.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР,
Рокишкское училище культуры

Поступило в редакцию
10.XI.1971

Литература

1. А. Бикялис, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, Liet. matem. rink., XII, № 4 (1972).
2. В. И. Паулаускас, О сумме случайного числа многомерных случайных величин, Liet. matem. rink., XII, № 2 (1972).
3. С. Х. Сираждинов, М. Маматов, Ш. Қ. Форманов, Равномерные оценки в предельных теоремах для сумм случайного числа независимых случайных величин, Известия АН Узб ССР, № 5 (1970), 28–34.
4. C.–G. Esseen, On the remainder term in the central limit theorem, Arkiv for matematik, VLIII, Nr. 1 (1969), 7–15.
5. Ю. В. Прохоров, О равномерной предельной теореме А. Н. Колмогорова, Теория вероят. и ее прим., V, № 1 (1960), 103–113.

LIEKAMOJO NARIO ĮVERTINIMAS CENTRINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE, KAI DĖMENŲ SKAIČIUS YRA ATSITIKTINIS

A. Nakas

(*Reziumė*)

Tarkime, kad $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\eta, \ldots$ – nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su $M\xi_1=0$, $D\xi_1=1$. Be to, tarkime, kad $S_\eta=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_\eta$, $Z_\eta=\frac{S_\eta}{\sqrt{\alpha}}$; čia η – atsitiktinis dydis su $M_\eta=\alpha$, $D_\eta=\gamma^2$, įgyjantis sveikas neneigiamas reikšmes $k=1, 2, \ldots$. Darbe įrodoma teorema:

Egzistuoja tokia konstanta C, kad

$$|F_{Z_\eta}(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{C}{(1+|x|)^3\sqrt{\alpha}}\left(1+\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\gamma^2}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)\cdot$$

$$\cdot\sup_{0<z\leqslant(1+|x|)\sqrt{\alpha}}\left[\left|\int_{|u|\leqslant z}u^3\,dF(u)\right|+z\int_{|u|\geqslant z}u^2\,dF(u)\right].$$

ABSCHÄTZUNG DES RESTGLIEDES IM ZENTRALEN GRENZWERTSATZ MIT DER ZUFÄLLIGEN ANZAHL ZUFÄLLIGER SUMMANDEN

A. Nakas

(*Zusammenfassung*)

Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\eta, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsgrößen mit gleicher Verteilung mit dem $M\xi_1=0$ und $D_\eta=\gamma^2$.

Sei $S_\eta=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_\eta$, $Z=_\eta\frac{S_\eta}{\sqrt{\alpha}}$, wo η eine Zufallsgröße mit dem $M\eta=\alpha$ und $D\eta=\gamma^2$ ist, die ganzen positiven Werte annimmt. Im vorliegenden Artikel wird der folgende Satz bewiesen:

Es gilt

$$|F_{Z_\eta}(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{C}{(1+|x|)^3\sqrt{\alpha}}\left(1+\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\gamma^2}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)\cdot$$

$$\cdot\sup_{0<z\leqslant(1+|x|)\sqrt{\alpha}}\left[\left|\int_{|u|\leqslant z}u^3\,dF(u)\right|+z\int_{|u|\geqslant z}u^2\,dF(u)\right],$$

wobei C eine absolute Konstante ist.