1972

УДК 518.9

НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ НА ЕДИНИЧНОМ КВАДРАТЕ С РАЗЛИЧНЫМИ КРИВЫМИ РАЗРЫВА ЯДЕР ИГРЫ

Д. Суджюте

Работа является продолжением исследований автора [4, 5] по бесконечным неантагонистическим играм двух лиц.

Рассматривается игра на единичном квадрате, ядра которой обладают некоторыми свойствами монотонности, ограниченности и гладкости, которые могут нарушаться на некоторой непрерывной, строго монотонной кривой, проходящей через точки (0, 0) и (1,1). Исследуется вид спектров равновесных стратегий, а в частных случаях доказывается существование ситуаций равновесия и указывается, как их находить.

Игра определяется ядрами игры и множествами стратегий игроков, которыми для каждого игрока являются множества функций распределения. При выборе первым игроком функции распределения $x(\xi)$, а вторым $y(\eta)$, первый выигрывает

$$\int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta)\, dx(\xi)\, dy(\eta),$$

а второй

$$\int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta)\, dx(\xi)\, dy(\eta).$$

В этих выражениях и далее интегралы Лебега–Стилтьеса; всюду предполагается их существование. Кроме того, ядра игры

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} M(\xi, \eta), & \eta > m(\xi), \\ k(\xi), & \eta = m(\xi), \\ N(\xi, \eta), & \eta < m(\xi), \end{cases}$$

$$L(\xi, \eta) = \begin{cases} P(\xi, \eta), & \eta > r(\xi), \\ l(\xi), & \eta = r(\xi), \\ R(\xi, \eta), & \eta < r(\xi) \end{cases}$$

определены и ограничены на замкнутом квадрате $0 \leqslant \xi, \eta \leqslant 1$ и

1) функции $m(\xi)$, $r(\xi)$ непрерывны, строго возрастают и $m(0) = r(0) = 0$, $m(1) = r(1) = 1$;

2) функции M, N, P, R определены в замкнутых областях соответственно:

$M(\xi, \eta)$ для $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $m(\xi) \leqslant \eta \leqslant 1$,

$N(\xi, \eta)$ для $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant m(\xi)$,

$P(\xi, \eta)$ для $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $r(\xi) \leqslant \eta \leqslant 1$,

$R(\xi, \eta)$ для $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant r(\xi)$;

3) функции M, N строго возрастают по ξ, а P, R — по η в своих областях определения.

Следующие два условия будут приниматься только в некоторых утверждениях:

4) для точки $\xi \in (0, 1)$ выполнено хотя бы одно из следующих соотношений:

$$k(\xi) < M\Big(\xi, m(\xi)\Big), \qquad k(\xi) \leqslant N\Big(\xi, m(\xi)\Big),$$

$$k(\xi) = M\Big(\xi, m(\xi)\Big) = N\Big(\xi, m(\xi)\Big)$$

и хотя бы одно из следующих соотношений:

$$l(\xi) \leqslant P\Big(\xi, r(\xi)\Big), \qquad l(\xi) < R\Big(\xi, r(\xi)\Big),$$

$$l(\xi) = R\Big(\xi, r(\xi)\Big) = R\Big(\xi, r(\xi)\Big);$$

5) функции M, N непрерывны по ξ и P, R непрерывны по η в своих областях определения.

Ситуацией равновесия назовем пару стратегий $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$, удовлетворяющую условиям

$$\int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta)\, dx(\xi)\, dy_0(\eta) \leqslant \int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy_0(\eta), \tag{1}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy(\eta) \leqslant \int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy_0(\eta) \tag{2}$$

для любых функций распределения $x(\xi)$ и $y(\eta)$.

Спектром функции распределения называем наименьшее замкнутое множество, вне которого мера функции равна 0.

Спектры функций распределения в ситуации равновесия $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$ будем обозначать соответственно S_1 и S_2.

Когда игроки применяют в игре ситуацию равновесия $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$, их выигрыши обозначаются соответственно через

$$\int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy_0(\eta) = v,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy_0(\eta) = w.$$

Для фиксированной пары стратегий $x(\xi)$, $y(\eta)$ введем следующие функции:

$$V(\xi)=\int_0^1 K(\xi,\ \eta)\,dy(\eta), \qquad W(\eta)=\int_0^1 L(\xi,\ \eta)\,dx(\xi).$$

Так как $V(\xi)$ является выигрышем первого игрока, когда второй выбирает стратегию $y(\eta)$, а первый – чистую стратегию ξ (т.е. точку ξ с вероятностью 1) и $W(\eta)$ является выигрышем второго игрока, когда первый игрок выбирает стратегию $x(\xi)$, а второй – чистую стратегию η, то для ситуации равновесия по определению выполняются неравенства

$$V(\xi)\leqslant v, \qquad W(\eta)\leqslant w, \qquad (0\leqslant\xi,\ \eta\leqslant 1). \tag{3}$$

Пусть $A=\{\xi\}$ – множество точек из интервала $[0, 1]$. Назовем точку ξ_0 предельной точкой для A слева (справа), или левой (правой) предельной точкой, если ξ_0 является предельной точкой множества $A\cap(0,\ \xi_0)$ (соответственно множества $A\cap(\xi_0,\ 1)$). Соответствующую последовательность $\xi_n\in A$, $\lim\xi_n=\xi_0$, $\xi_n<\xi_0$ $(\xi_n>\xi_0)$, $n=1, 2, \ldots$, будем называть левой (правой) последовательностью точки ξ_0.

Лемма 1. *Если для ситуации равновесия в игре на единичном квадрате точка $\xi_0\in S_1$, то либо она является точкой скачка для $x_0(\xi)$ и тогда $V(\xi)_0=v$; либо она является левой (правой) предельной точкой для S_1, и тогда существует левая (правая) последовательность ξ_n точки ξ_0, такая, что $V(\xi_n)=v$, $n=1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Пусть $V(\xi_0)<v$, $\xi_0\in S_1$ – точка скачка для $x_0(\xi)$. Тогда при интегрировании $V(\xi)$ по $x_0(\xi)$ ввиду (3) получим, что

$$\int_0^1\int_0^1 K(\xi,\ \eta)\,dy_0(\eta)\,dx_0(\xi)<v, \tag{4}$$

а это противоречит (1).

Если ξ_0 – левая предельная точка для S_1, и упомянутой последовательности не существует, то должен существовать интервал вида $(\xi_0-\varepsilon,\ \xi_0)$, $\varepsilon>0$, в котором для всех $\xi\in S_1$ было бы $V(\xi)<v$. Но так как этот интервал не может иметь x_0 – меры 0, то опять, ввиду (3), получаем (4).

Для правой последовательности рассуждение будет аналогичным.

Доказательство леммы будет завершено, если покажем, что в S_1 других точек, кроме точек скачка и предельных точек этого множества, не существует. На самом деле, спектр состоит только из изолированных и предельных его точек. Каждая изолированная точка спектра функции распределения непременно является точкой скачка, так как иначе она имела бы меру 0 и не входила в спектр.

Аналогично доказывается лемма 2.

Лемма 2. *Если для ситуации равновесия в игре на единичном квадрате точка $\eta_0\in S_2$, то либо она является точкой скачка для $y_0(\eta)$ и тогда $W(\eta_0)=w$; либо она является левой (правой) предельной точкой для S_2 и тогда существует левая (правая) последовательность η_n точки η_0, такая, что $W(\eta_n)=w$, $n=1, 2, \ldots$.*

Лемма 3. *Пусть игра удовлетворяет условиям* 1), 2), 3). *Тогда, если* $\xi_0 \notin S_1 \cap (0,1)$, *то* $r(\xi_0) \notin S_2 \cap (0,1)$, *и если* $\eta_0 \notin S_2 \cap (0,1)$, *то* $m^{-1}(\eta_0) \notin S_1 \cap (0,1)$.

Доказательство. Докажем только первое утверждение леммы, второе доказывается аналогично.

Так как спектр является непустым ограниченным замкнутым множеством, то S_1 есть сегмент или получается из него удалением конечного или счетного множества интервалов. Пусть $\xi_0 \in (c, d)$, $(c, d) \cap S_1 = \varnothing$, $c, d \in (0, 1)$, и допустим противное утверждению леммы, т.е. что $r(\xi_0) \in S_2$. Тогда по лемме 2 в каждой окрестности

$$\left(r(\xi_0) - \varepsilon,\ r(\xi_0) + \varepsilon\right),\quad \varepsilon > 0,$$

найдется точка η_1, в которой $W(\eta_1) = w$. Так как ε можно выбрать так, чтобы точка η_1 принадлежала интервалу $\left(r(c),\ r(d)\right)$, а $W(\eta)$ — ввиду 3), в этом интервале строго возрастает, то в любой точке

$$\eta_2 > \eta_1,\quad \eta_2 \in \left(r(c),\ r(d)\right)$$

будет $W(\eta_2) > w$, что означало бы неуравновешенность пары $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$.

Лемма 4. *Если игра удовлетворяет условиям* 1), 2), 3); *интервал* (c, d) *такой, что* $S_1 \cap (c, d) = \varnothing$, $d \in S_1$, $m(\xi) \leqslant r(\xi)$ *для* $\xi \in (c, d)$ *и* $r(c) < m(d)$, *то* $m(d) = r(d)$.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что

$$\left(r(c),\ r(d)\right) \cap S_2 = \varnothing$$

и

$$\left(m^{-1}\left(r(c)\right),\ m^{-1}\left(r(d)\right)\right) \cap S_1 = \varnothing,$$

где

$$m^{-1}\left(r(c)\right) < m^{-1}\left(m(d)\right),\quad \text{т.е.}\quad m^{-1}\left(r(c)\right) < d.$$

Если предположить противное утверждению леммы, т.е. что

$$m(d) < r(d)$$

(обратное неравенство невозможно ввиду условий леммы), то

$$m^{-1}\left(m(d)\right) < m^{-1}\left(r(d)\right),$$

или, что то же самое, $d < m^{-1}\left(r(d)\right)$. Таким образом,

$$\left(m^{-1}\left(r(c)\right),\ m^{-1}\left(r(d)\right)\right) \cap S_1 = \varnothing,$$

$$d \in \left(m^{-1}\left(r(c)\right),\ m^{-1}\left(r(d)\right)\right),$$

что противоречит условиям леммы.

Следующие три леммы доказываются таким же образом.

Лемма 5. *Если игра удовлетворяет условиям* 1), 2), 3), *интервал* (c, d) *такой, что* $S_2 \cap (c, d) = \varnothing$, $d \in S_2$, $m^{-1}(\eta) \geqslant r^{-1}(\eta)$ *для* $\eta \in (c, d)$ *и* $m^{-1}(c) < r^{-1}(d)$, *то* $m^{-1}(d) = r^{-1}(d)$.

Лемма 6. *Если игра удовлетворяет условиям* 1), 2), 3), *интервал* (c, d) *такой, что* $S_1 \cap (c, d) = \varnothing$, $c \in S_1$, $m(\xi) \geqslant r(\xi)$ *для* $\xi \in (c, d)$ *и* $r(d) > m(d)$, *то* $m(c) = r(c)$.

Лемма 7. *Если игра удовлетворяет условиям* 1), 2), 3), *интервал* (c, d) *такой, что* $S_2 \cap (c, d) = \varnothing$, $c \in S_2$, $m^{-1}(\eta) \leqslant r^{-1}(\eta)$ *для* $\eta \in (c, d)$ *и* $m^{-1}(d) > r^{-1}(c)$, *то* $m^{-1}(c) = r^{-1}(c)$.

Пусть $r(\xi) > m(\xi)$ для $\xi \in (a, b)$ и $r(a) = m(a)$, $r(b) = m(b)$. Если во множество $S_1 \cap (a, b)$ не входит интервал (c, b), $c \in S_1$, то по лемме 3 во множество

$$S_2 \cap \Big(r(a),\ r(b)\Big)$$

не входит интервал вида

$$\Big(d,\ r(b)\Big),\quad d \in S_2,$$

где $m(c) \leqslant d \leqslant r(c)$. Далее, если в $S_1 \cap (a, c)$ не входит интервал (p_1, r_1), $p_1, r_1 \in S_1$, то в $S_2 \cap (r(a), d)$ не входит интервал (p_2, r_2), $p_2, r_2 \in S_2$, где $p_2 \leqslant r(p_1)$, $r_2 \geqslant r(r_1)$, а тогда опять по лемме 3 в S_1 не входит (p_3, r_3), $p_3, r_3 \in S_1$, где

$$p_3 \leqslant m^{-1}(p_2) \leqslant m^{-1}\Big(r(p_1)\Big),\quad r_3 \geqslant m^{-1}(r_2) \geqslant m^{-1}\Big(r(r_1)\Big).$$

Далее в S_2 не входит (p_4, r_4), $p_4, r_4 \in S_2$, где

$$p_4 \leqslant r(p_3) \leqslant r\bigg(m^{-1}\Big(p_2\Big)\bigg) \leqslant r\bigg(m^{-1}\Big(r(p_1)\Big)\bigg),$$

$$r_4 \geqslant r(r_3) \geqslant r\Big(m^{-1}(r_2)\Big) \geqslant r\bigg(m^{-1}\Big(r(r_1)\Big)\bigg)$$

и т.д. Лемма 3 утверждает, что в спектр S_1 входит точка $r^{-1}(d)$ и в спектр S_2 входит точка $m(c)$. Таким образом, в $S_1 \cap (a, c)$ могут не входить только те интервалы, из которых полученные вышеуказанным образом интервалы с нечетными индексами не содержат точек c и $r^{-1}(d)$, а с четными индексами — точек d и $m^{-1}(c)$. Если любой, не входящий в $S_2 \cap \Big(r(a),\ d\Big)$ интервал обозначим (p_2, r_2), то для него получится точно такой же вывод, так как любой такой интервал (p_j, r_j) либо сам содержится в одном из интервалов $\Big(r^{-1}(d),\ c\Big)$ и $\Big(m^{-1}(c),\ d\Big)$ соответственно, если j — четные или нечетные, либо при помощи вышеописанного перехода придем к одному из таких ввиду свойств функций $m(\xi)$, $r(\xi)$ и взаимосвязи c и d. Получается, что из спектров данной ситуации равновесия могут быть удалены только такие интервалы: (s_1, t_1), содержащиеся в $\Big(r^{-1}(d),\ c\Big)$ для S_1; (s_2, t_2), содержащиеся в $\Big(m^{-1}(c),\ d\Big)$ для S_2, и любые (s_j, t_j), $j = 1, 2, \ldots$, с нечетными индексами для S_1 и с четными индексами для S_2, связанные с (s_1, t_1) или (s_2, t_2) следующими неравенствами: $s_{2j} \geqslant m(s_{2j-1})$, $t_{2j} \leqslant m(t_{2j-1})$, $s_{2j+1} \geqslant r^{-1}(s_{2j})$, $t_{2j+1} \leqslant r^{-1}(t_{2j})$ для $j = 2, 3, \ldots$.

Будем говорить, что вышеописанная ситуация равновесия в интервале (a, b) имеет спектры типа (m, r, c, d). Такое же рассуждение в случае, когда $m(\xi)>r(\xi)$ для $\xi\in(a, b)$ и $r(a)=m(a)$, $r(b)=m(b)$ приводит к определению спектров типа (r, m, c, d) в интервале (a, b).

Из всех лемм вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1), 2), 3), *во всем интервале* (a,b) *действительно одностороннее неравенство* $m(\xi)>r(\xi)$ *или* $r(\xi)>m(\xi)$ *и* $m(a)=r(a)$, $m(b)=r(b)$. *Тогда либо* $(a, b)\cap S_1=\varnothing$, $\left(r(a), r(b)\right)\cap S_2=\varnothing$, *либо ситуация равновесия в интервале* (a, b) *имеет спектры типа* (r, m, c, d) *или* (m, r, c, d), *либо множество* $(a, b)\cap S_1$ *равно самому интервалу* (a, b) *или получается из него удалением интервалов вида* (c_1, d_1), $c_1, d_1\in S_1$, *таких, что для произвольно выбранных* $\xi_1, \xi_2\in(c_1, d_1)$ *во всем интервале выполняется одно из неравенств* $m(\xi_1)\geqslant r(\xi_2)$, $m(\xi_1)\leqslant r(\xi_2)$, *а множество*

$$\left(r(a), r(b)\right)\cap S_2$$

равно самому интервалу $\left(r(a), r(b)\right)$ *или получается из него удалением интервалов вида* (c_2, d_2), $c_2, d_2\in S_2$, *таких, что для произвольно выбранных* $\eta_1, \eta_2\in(c_2, d_2)$ *во всем интервале выполняется одно из неравенств* $m^{-1}(\eta_1)\geqslant r^{-1}(\eta_2)$, $m^{-1}(\eta_1)\leqslant r^{-1}(\eta_2)$ (леммы 4, 5, 6, 7).

Лемма 8. *Допустим, что в игре, удовлетворяющей условиям* 1), 2), 3), *для* $\xi_0\in(0, 1)$ *выполнено соотношение* $m(\xi_0)=r(\xi_0)$. *Тогда либо обе точки* ξ_0 *и* $m(\xi_0)$ *являются изолированными справа (слева) точками соответственно спектров* S_1 *и* S_2, *либо обе не являются таковыми. В случае изолированности справа функции* $x_0(\xi)$ *и* $y_0(\eta)$ *имеют соответственно в точках* ξ_0 *и* $m(\xi_0)$ *скачки.*

Доказательство. Докажем, что если $\xi_0\in S_1\cap(0, 1)$, $m(\xi_0)=r(\xi_0)$, является изолированной справа точкой спектра S_1, то точка $m(\xi_0)$ является изолированной справа точкой спектра S_2 (обратное утверждение доказывается таким же образом). Из соотношения $\xi_0\in S_1\cap(0, 1)$ следует, что $m(\xi_0)\in S_2\cap(0, 1)$, так как в противном случае из соотношения $m(\xi_0)\notin S_2\cap(0,1)$ по лемме 3 получаем, что

$$m^{-1}\left(m(\xi_0)\right)=\xi_0\notin S_1\cap(0,1).$$

Та же лемма утверждает, что из соотношения $(\xi_0, \xi_0+\varepsilon)\cap S_1=\varnothing$, $\varepsilon>0$, ввиду равенства $m(\xi_0)=r(\xi_0)$ следует соотношение

$$\left(m(\xi_0), m(\xi_0+\varepsilon_1)\right)\cap S_2=\varnothing.$$

В случае изолированности слева доказательство аналогично.

Остается показать последнее утверждение леммы.

Пусть

$$(\xi_0, c)\cap\left(S_1\cap(0,1)\right)=\varnothing,\quad c>\xi_0,\quad \xi_0\neq 0$$

и допустим, что $x_0(\xi)$ непрерывна в точке ξ_0. Если $m(\xi_0)$ — точка скачка для

$y_0(\eta)$, то $W\Big(m(\xi_0)\Big)=w$

по лемме 2. Если $m(\xi_0)$ – левая предельная точка для S_2, то по лемме 2 существует левая возрастающая последовательность $\eta_n \in S_2$, $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = m(\xi_0)$, $W(\eta_n)=w$, $n=1, 2, \ldots$. Последовательность функций $L(\xi, \eta_n)$ сходится (ввиду строгого возрастания P и R) почти всюду относительно меры $x_0(\xi)$ к функции $h(\xi)$, которая не больше $L(\xi, m(\xi_0))$. Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$w = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 L(\xi, \eta_n)\, dx_0(\xi) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} L(\xi, \eta_n)\, dx_0(\xi) =$$

$$= \int_0^{m(\xi_0)-0} h(\xi)\, dx_0(\xi) + \int_{m(\xi_0)+0}^1 h(\xi)\, dx_0(\xi) \leqslant \int_0^{m(\xi_0)-0} P\Big(\xi, m(\xi_0)\Big)\, dx_0(\xi) +$$

$$+ \int_{m(\xi_0)+0}^1 R\Big(\xi, m(\xi_0)\Big)\, dx_0(\xi) = \int_0^1 L\Big(\xi, m(\xi_0)\Big)\, dx_0(\xi).$$

Таким образом, $W\Big(m(\xi_0)\Big)$ и в этом случае не меньше w. Так как точка $m(\xi_0)$ принадлежит спектру S_2, то двумя разобранными случаями исчерпываются все возможности для точки $m(\xi_0)$ и в обоих случаях получается противоречие между строгим возрастанием $W(\eta)$ в интервале $\Big(m(\xi_0), r(c)\Big)$ и неравенством (3). Противоречие доказывает, что функция $x_0(\xi)$ должна иметь скачок в точке ξ_0.

Разрывность функции $y_0(\eta)$ в точке $m(\xi_0)$ доказывается аналогично.

Лемма 9. *В условиях* 1)–5) *точка* $\xi_0 \in (0, 1)$, *в которой* $m(\xi_0)=r(\xi_0)$ *не может быть изолированной справа точкой спектра* S_1 *и* $m(\xi_0)$ *не может быть изолированной справа точкой спектра* S_2.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно, например, что ξ_0 является изолированной справа точкой спектра S_1 и $m(\xi_0)=r(\xi_0)$. Тогда по предыдущей лемме $m(\xi_0)$ является изолированной справа точкой спектра S_2, т.е. непустой интервал вида $\Big(m(\xi_0), \eta_0\Big)$ не входит в S_2 и в точках ξ_0 и $m(\xi_0)$ соответственно функции $x_0(\xi)$ и $y_0(\eta)$ имеют скачки. Так как по лемме 1 значение функции $V(\xi)$ в точках скачка $x_0(\xi)$ равно v, то

$$v = V(\xi_0) = \int_0^{m(\xi_0)-0} N(\xi_0, \eta)\, dy_0(\eta) + \alpha k\Big(\xi_0, m(\xi_0)\Big) +$$

$$+ \int_{\eta_0-0}^1 M(\xi_0, \eta)\, dy_0(\eta),$$

где $\alpha > 0$. Докажем, что соотношение

$$M\Big(\xi_0, m(\xi_0)\Big) > k\Big(\xi_0, m(\xi_0)\Big)$$

не может выполняться. Пусть оно выполнено. Берем любую возрастающую последовательность $\xi_n \to \xi_0$, $n=1, 2, \dots$. Для этой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} V(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 K(\xi_n, \eta)\, dy_0(\eta) =$$

$$= \int_0^{m(\xi_0)-0} N(\xi_0, \eta)\, dy_0(\eta) + \alpha M\left(\xi_0, m(\xi_0)\right) + \int_{m(\xi_0)+0}^1 M(\xi_0, \eta)\, dy_0(\eta) > v,$$

где переход к пределу под знаком интеграла возможен по теореме Лебега ввиду монотонного возрастания и непрерывности по ξ функций M и N. Таким образом, существует значение ξ, для которого $V(\xi) > v$, а это противоречит определению ситуации равновесия. Далее, ввиду доказанного неравенства и условия 4), выполнено соотношение

$$k\left(\xi_0, m(\xi_0)\right) \leqslant N\left(\xi_0, m(\xi_0)\right),$$

и в любой точке $a \in \left(\xi_0, m^{-1}(\eta_0)\right)$ имеем

$$V(a) = \int_0^{m(\xi_0)-0} N(a, \eta)\, dy_0(\eta) + \alpha N\left(a, m(\xi_0)\right) + \int_{\eta_0-0}^1 M(a, \eta)\, dy_0(\eta) > v,$$

что противоречит определению ситуации равновесия. Итак, допущение, что ξ_0 является изолированной справа точкой спектра S_1, неверно.

Допустим далее, что $m(\xi_0)$ – изолированная справа точка спектра S_2. В таком случае, используя монотонность и непрерывность по η функций P и R с помощью подобных рассуждений для функции $W(\eta)$ вместо $V(\xi)$, придем опять к противоречию с определением ситуации равновесия.

Следствием этой леммы является следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1)–5), $m(\xi) = r(\xi)$ *для* $\xi \in [a, b]$,

$$a > 0 \quad \left(m(\xi) = r(\xi) \text{ для } \xi \in [0, b]\right),$$

то из соотношения

$$\xi_0 \in S_1 \cap [a, b) \quad \left(\xi_0 \in S_1 \cap (0, b)\right)$$

следуют соотношения

$$[\xi_0, b) \subset S_1, \ [m(\xi_0), m(b)\big) \subset S_2$$

и из соотношения

$$\eta_0 \in S_2 \cap [m(a), m(b)] \left(\eta_0 \in S_2 \cap \left(0, m(b)\right)\right)$$

следуют соотношения

$$[m^{-1}(\eta_0), b\big) \subset S_1, \ [\eta_0, m(b)\big) \subset S_2.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1)—4),* $m(\xi)<r(\xi)$ *для* $\xi\in(a, b)$, $0\leqslant a$, $b\leqslant 1$ *и* $m(a)=r(a)$, $m(b)=r(b)$. *Если имеется интервал* $(a, a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, *в котором выполняется неравенство*

$$M\big(\xi,\ m(\xi)\big)\leqslant N\big(\xi,\ m(\xi)\big) \tag{5}$$

или

$$P\big(\xi,\ r(\xi)\big)\geqslant R\big(\xi,\ r(\xi)\big), \tag{6}$$

то

$$(a,\ b)\cap S_1=\varnothing \quad \text{и} \quad \big(m(a),\ m(b)\big)\cap S_2=\varnothing .$$

Доказательство. Пусть для определенности в интервале $(a, a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ выполнено неравенство (5). Допустим, что в любом интервале $(a, a+\delta)$, $\delta>0$, находится точка из спектра S_1. Тогда по лемме 1 можно выбрать две различные точки c, $d\in(a, a+\varepsilon)$, в которых $V(c)=V(d)=v$.

Докажем, что если $y_0(\eta)$ в точке $m(c)$ имеет скачок $\alpha>0$, то

$$k\big(c,\ m(c)\big)=N\big(c,\ m(c)\big).$$

Пусть это равенство не выполнено, тогда ввиду 4) и 5)

$$k\big(c,\ m,\ (c)\big)<N\big(c,\ m(c)\big).$$

Берем убывающую последовательность $\xi_n\to c$. Соответствующая последовательность функций $K(\xi_n, \eta)$ сходится ввиду монотонного убывания функций M и N к функции $h(\eta)$, которая в интервале $[0, 1]$ не меньше $K(c, \eta)$, а для $\eta=m(c)$ — больше $k\big(c,\ m\ (c)\big)$. Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$\lim_{n\to\infty} V(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 K(\xi_n, \eta)\,dy_0(\eta)=\int_0^1 h(\eta)\,dy_0(\eta)=$$

$$=\int_0^{m(c)-0} h(\eta)\,dy_0(\eta)+\alpha h\big(m(c)\big)+\int_{m(c)+0}^1 h(\eta)\,dy_0(\eta)>V(c)=v,$$

и по определению предела найдется точка, в которой $V(\xi_n)>v$, а это противоречит определению ситуации равновесия. Так же доказывается, что если в точке $m(d)$ функция $y_0(\eta)$ имеет скачок, то

$$k\big(d,\ m(d)\big)=N\big(d,\ m(d)\big).$$

Таким образом, имеем

$$V(c)=\int_0^{m(c)+0} N(c,\ \eta)\,dy_0(\eta)+\int_{m(c)+0}^{m(d)+0} M(c,\ \eta)\,dy_0(\eta)+$$

$$+\int_{m(d)+0}^{1} M(c,\ \eta)\,dy_0(\eta)=v,$$

$$V(d)=\int_{0}^{m(c)+0} N(d,\ \eta)\,dy_0(\eta)+\int_{m(c)+0}^{m(d)+0} N(d,\ \eta)\,dy_0(\eta)+$$

$$+\int_{m(d)+0}^{1} M(d,\ \eta)\,dy_0(\eta)=v,$$

но, ввиду неравенства (5), функции под знаками интегралов в первой сумме строго меньше функций во второй сумме, что противоречит их равенству. Таким образом, существует интервал вида $(a,\ a+\delta)$, $\delta>0$, который не имеет точек из спектра S_1. Но тогда по лемме 4 можно сделать вывод, что $(a,\ b)\cap \cap S_1=\varnothing$, а из этого, по лемме 3 следует, что

$$\Big(m(a),\ m(b)\Big)\cap S_2=\varnothing.$$

Если выполнено условие (6), то в доказательстве вместо леммы 4 применяем лемму 5.

Аналогично, используя леммы 6 и 7 и теорему 2, доказываются следующие две теоремы.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1)—4), $m(\xi)>r(\xi)$ *для* $\xi\in(a,\ b)$, $0\leqslant a,\ b\leqslant 1$, *и* $m(a)=r(a)$, $m(b)=r(b)$. *Если имеется интервал* $(b-\varepsilon,\ b)$, $\varepsilon>0$, *в котором выполняется неравенство*

$$M\Big(\xi,\ m(\xi)\Big)\leqslant N\Big(\xi,\ m(\xi)\Big)$$

или

$$P\Big(\xi,\ r(\xi)\Big)\geqslant R\Big(\xi,\ r(\xi)\Big),$$

то

$$(a,\ b)\cap S_1=\varnothing \quad и \quad \Big(m(a),\ m(b)\Big)\cap S_2=\varnothing.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* 1)—5), $m(\xi)=r(\xi)$ *для* $\xi\in[a,\ b]$, $0\leqslant a,\ b\leqslant 1$. *Если имеется интервал* $(b-\varepsilon,\ b)$, $\varepsilon>0$, *в котором выполняется неравенство*

$$M\Big(\xi,\ m(\xi)\Big)\leqslant N\Big(\xi,\ m(\xi)\Big)$$

или

$$P\Big(\xi,\ r(\xi)\Big)\geqslant R\Big(\xi,\ r(\xi)\Big),$$

то $[a,\ b)\cap S_1=\varnothing$, *если*

$$a\neq 0\ \Big((a,\ b)\cap S_1=\varnothing,\ \text{если}\ a=0\Big)\ \text{и}\ \Big[m(a),\ m(b)\Big)\cap S_2=\varnothing$$

$$\Big((m(a),\ m(b)\Big)\cap S_2=\varnothing,\ \text{если}\ a=0\Big).$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* 1)—5) *и*

а) *функции* $m(\xi)$ *и* $r(\xi)$ *такие, что интервалов, в каждом из которых выполняется неравенство* $m(\xi)<r(\xi)$ *или* $m(\xi)>r(\xi)$, *имеется конечное число*;

б) для каждого интервала (a, b), *в котором* $m(\xi)<r(\xi)$ *для* $\xi\in(a, b)$ *и* $m(a)=r(a)$, *имеется окрестность* $(a, a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, *в которой либо*

$$M\Big(\xi, m(\xi)\Big)<N\Big(\xi, m(\xi)\Big), \text{ либо } P\Big(\xi, r(\xi)\Big)>R\Big(\xi, r(\xi)\Big);$$

в) существует интервал вида $(1-\varepsilon, 1)$, $\varepsilon>0$, *в котором или* $m(\xi)<r(\xi)$, *или*

$$M\Big(\xi, m(\xi)\Big)\leqslant N\Big(\xi, m(\xi)\Big), \text{ или } P\Big(\xi, r(\xi)\Big)\geqslant R\Big(\xi, r(\xi)\Big).$$

Тогда в ситуациях равновесия функции распределения постоянны на интервале $(0, 1)$.

Доказательство. Условие а) теоремы позволяет разбить весь интервал $[0, 1]$ на конечное число непустых замкнутых и открытых интервалов (замкнутые интервалы могут состоять из одной точки) таких, что в открытых интервалах выполняется одностороннее неравенство $m(\xi)>r(\xi)$ или $m(\xi)<r(\xi)$, и в концах интервала значения функций m и r совпадают, а в замкнутых $m(\xi)=r(\xi)$. Обозначим эту систему интервалов буквой I.

Возьмем интервал из I с правым концом 1. Если он имеет вид $(\xi_0, 1)$, где $m(\xi_0)=r(\xi_0)$, $m(\xi)<r(\xi)$ для $\xi\in(\xi_0, 1)$, то по теореме 3 ввиду условия б) получаем, что $(\xi_0, 1)\cap S_1=\varnothing$. Если этот интервал имеет вид $(\xi_0, 1)$, где $m(\xi_0)=r(\xi_0)$, $m(\xi)>r(\xi)$ для $\xi\in(\xi_0, 1)$, или вид $[\xi_0, 1]$, $\xi_0<1$, где $m(\xi)=r(\xi)$, $\xi\in[\xi_0, 1]$, то по теореме 4 или 5, ввиду условия в), опять получаем, что $(\xi_0, 1)\cap S_1=\varnothing$.

Точка ξ_0, будучи изолированной справа, по лемме 9 не может принадлежать S_1, так что существует интервал, содержащий ξ_0, который не входит в S_1, и, если $(\xi_1, \xi_0)\in I$, $m(\xi_1)=r(\xi_1)$, $m(\xi)>r(\xi)$ для $\xi\in(\xi_1, \xi_0)$, то по лемме 6 получаем, что $(\xi_1, \xi_0)\cap S_1=\varnothing$. Если (ξ_1, ξ_0) такой, что $m(\xi_1)=r(\xi_1)$, $m(\xi)<r(\xi)$ для $\xi\in(\xi_1, \xi_0)$, то ввиду условия б) по теореме 3 опять заключаем, что $(\xi_1, \xi_0)\cap S_1=\varnothing$. Если в последнем случае, т.е. когда интервал из I имеет вид $[\xi_1, \xi_0]$, $m(\xi)=r(\xi)$ для $\xi\in[\xi_1, \xi_0]$ допустить, что $[\xi_1, \xi_0]\cap S_1\neq\varnothing$, то это ввиду теоремы 2 противоречит тому, что интервал, содержащий ξ_0, не входит в S_1. Далее для точки ξ_1 рассуждение такое же, как и для ξ_0, и т.д. Повторяя это рассуждение, ввиду конечности системы I, после некоторого числа шагов получим, что $(0, 1)\cap S_1=\varnothing$, а из этого по лемме 3 следует, что $(0, 1)\cap S_2=\varnothing$, это и требовалось доказать.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* 1)–4). *Тогда, если* $M(\xi, \eta)$ *и* $N(\xi, \eta)$ *непрерывны по* ξ *и* η *в своих областях определения, то точки* $\xi\in(0, 1)$, *в которых*

$$M\Big(\xi, m(\xi)\Big)<N\Big(\xi, m(\xi)\Big),$$

не входят в S_1, *и, если* $P(\xi, \eta)$ *и* $R(\xi, \eta)$ *непрерывны по* ξ *и* η *в своих областях определения, то точки* $\eta\in(0, 1)$, *в которых*

$$P\Big(r^{-1}(\eta), \eta\Big)>R\Big(r^{-1}(\eta), \eta\Big),$$

не входят в спектр S_2.

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы, второе доказывается аналогично.

Допустим противное, т.е., что $\xi_0 \in (0, 1)$,

$$M\Big(\xi_0,\ m(\xi_0)\Big) < N\Big(\xi_0,\ m(\xi_0)\Big),$$

но $\xi_0 \in S_1$. Тогда в силу непрерывности функций M и N существуют области

$$Q_1 = \Big(\xi_0 - \varepsilon_1 < \xi_1 < \xi_0 + \varepsilon_1,\ m(\xi_1) \leqslant \eta_1 < m(\xi_0) + \varepsilon_2\Big),$$

$$Q_2 = \Big(\xi_0 - \varepsilon_1 < \xi_2 < \xi_0 + \varepsilon_1,\ m(\xi_0) - \varepsilon_2 < \eta_2 \leqslant m(\xi_2)\Big),$$

такие, что для $(\xi_1, \eta_1) \in Q_1$ и $(\xi_2, \eta_2) \in Q_2$ выполнено неравенство $M(\xi_1, \eta_1) < N(\xi_2, \eta_2)$. В силу леммы 1 можно найти точку $a \in (\xi_0 - \varepsilon_1, \xi_0 + \varepsilon_1)$, в которой $V(a) = v$. Берем любую точку $b > a$, $b \in (\xi_0 - \varepsilon_1, \xi_0 + \varepsilon_1)$. Так как выполняется условие 4) и $M < N$ на точках кривой $\eta = m(\xi)$, принадлежащих Q_1 и Q_2, то, если $y_0(\eta)$ имеет в точке $m(a)$ $\Big($или $m(b)\Big)$ скачок, так же, как в теореме 3, докажем, что $k\Big(a, m(a)\Big) = N\Big(a, m(a)\Big)$ $\Big($или $k\Big(b, m(b)\Big) = N\Big(b, m(b)\Big)\Big)$.

Таким образом, имеем

$$V(b) - V(a) = \int\limits_0^{m(a)+0} [N(b, \eta) - N(a, \eta)]\, dy_0(\eta) + \int\limits_{m(a)+0}^{m(b)+0} [N(b, \eta) -$$

$$- M(a, \eta)]\, dy_0(\eta) + \int\limits_{m(b)+0}^{1} [M(b, \eta) - M(a, \eta)]\, dy_0(\eta) > 0,$$

так как все подынтегральные выражения положительны. Полученное неравенство противоречит определению ситуации равновесия, что и доказывает первую часть теоремы.

Далее обобщаются некоторые утверждения работы [5]. Рассматриваемая игра удовлетворяет ранее приведенным условиям 1)–5) и в ходе рассуждений принимаются то одни, то другие из следующих условий:

6) функции $m(\xi)$, $r(\xi)$ имеют ограниченные производные и $m(\xi) \geqslant r(\xi)$ во всем интервале $[0, 1]$;

7) функции M, N, P, R имеют непрерывные вторые частные производные в своих областях определения;

8) частные производные M_ξ, N_ξ, P_η, R_η положительны в соответствующих замкнутых областях с возможными исключениями $M_\xi(1,1) = 0$, $P_\eta(1, 1) = 0$;

9) для $\xi \in (0, 1)$ значения функции $k(\xi)$ находятся между $M\Big(\xi, m(\xi)\Big)$ и $N\Big(\xi,\ m(\xi)\Big)$, причем равенство $k(\xi) = M\Big(\xi, m(\xi)\Big)$ может выполняться только вместе с равенством $M\Big(\xi,\ m(\xi)\Big) = N\Big(\xi, m(\xi)\Big)$, а значения функции $l(\xi)$ находятся между $P\Big(\xi, r(\xi)\Big)$ и $R\Big(\xi, r(\xi)\Big)$ и из равенства $l(\xi) = R\Big(\xi, r(\xi)\Big)$ следует $R\Big(\xi, r(\xi)\Big) = P\Big(\xi, r(\xi)\Big)$;

10) $M(1,1)>N(1,1)$;

11) $P(1,1)<R(1,1)$;

12) $k(1)\leqslant M(1,1)$ и $l(1)\leqslant R(1,1)$.

Если усилить условие 6) требованием, чтобы функции $m(\xi)$ и $r(\xi)$ совпадали, то игру, удовлетворяющую и остальным требованиям 6), заменой переменной $\zeta=m(\xi)$ приводим к новой игре, которая исследовалась в [4], [5]. Обратная функция $\xi=m^{-1}(\zeta)$ тоже будет удовлетворять условиям 6), и поэтому, если $x(\xi)$ является функцией распределения, то $x\left(m^{-1}(\zeta)\right)$ тоже будет функцией распределения. Кроме того, неравенства (1) и (2) при этой замене переменной сохраняются, так что если $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$ – ситуация равновесия в этой игре, то $x_0\left(m^{-1}(\zeta)\right)$, $y_0(\eta)$ – ситуация равновесия в новой игре, и наоборот. Это взаимно однозначное соответствие между ситуациями равновесия $\{x_0(\xi), y_0(\eta)\}$ в исходной игре и $\{\tilde{x}_0(\zeta), \tilde{y}_0(\eta)\}$ в новой игре, устанавливаемое правилом $x_0(\xi)=\tilde{x}_0\left(m(\xi)\right)$, $y_0(\eta)=\tilde{y}_0(\eta)$, позволяет судить о свойствах равновесных стратегий исходной игры, опираясь на известные свойства игры, полученной заменой переменной $\zeta=m(\xi)$. Таким образом, если потребовать дополнительно выполнения условий 7)–9), то утверждения [5] с незначительными изменениями действительны и для этой игры.

Следующая теорема относится к ситуациям равновесия в игре, в которой $m(\xi)\geqslant r(\xi)$. В теореме фактически содержится и информация, как эти ситуации равновесия находить.

Теорема 8. *В игре, удовлетворяющей условиям* 1)–12), *существуют ситуации равновесия.*

Доказательство. Заменой переменной $\xi=r^{-1}\left(m(\zeta)\right)$ функцию $L(\xi,\eta)$ преобразуем в $\tilde{L}(\zeta,\eta)$. Игра с ядрами $K(\zeta,\eta)$, $\tilde{L}(\zeta,\eta)$, как следует из утверждений [5] и рассуждений, приведенных выше, имеет ситуацию равновесия, состоящую либо только из скачков в точках 0 и 1, либо из плотностей на интервале $[a, 1]$, $[m(a), 1]$ соответственно для первого и второго игроков, и возможных скачков в точках 0 и 1. В первом случае, очевидно, та же самая пара стратегий будет ситуацией равновесия и для исходной игры. Далее отметим, что в условиях теоремы для ситуации равновесия функции $V(\zeta)$ и $W(\eta)$ являются непрерывными в интервале $(0, 1)$ для игры с ядрами $K(\zeta,\eta)$, $\tilde{L}(\zeta,\eta)$. Пусть пара стратегий, имеющая плотности на интервалах $[\tilde{a}, 1]$ и $[m(\tilde{a}), 1]$ соответственно для I и II игроков, является ситуацией равновесия в этой игре. Тогда по лемме 1 [5] $V(\zeta)=v$ для $\zeta\in[\tilde{a}, 1)$ и $V(\zeta)\leqslant v$ для $\zeta\in(0,\tilde{a})$. В точках 0 и 1 $V(\zeta)=v$, если функция $x_0(\zeta)$ имеет скачок в соответствующей точке, и не больше v – в противном случае. Так как имеют место соотношения:

$$W(\eta)=\int_0^1 \tilde{L}(\xi,\eta)\,dx_0(\zeta)=\int_0^1 L(\xi,\eta)\,dx_0\left(m^{-1}\left(r(\xi)\right)\right),$$

$$V(\xi)=\int_0^1 K(\xi,\eta)\,dy_0(\eta),$$

то эти функции являются функциями V и W для пары стратегий $x_0\left(m^{-1}\left(r(\xi)\right)\right)$ и $y_0(\eta)$ в исходной игре, и ввиду непрерывности $V(\xi)$ и $W(\eta)$ для того, чтобы эта пара была ситуацией равновесия в данной игре, достаточно выполнения условий леммы 1 [5]. На самом деле, так как $y_0(\eta)$ не меняется, то для $W(\eta)$ эти условия выполнены. Функция $x_0(\zeta)$ начальной точкой функции плотности имеет точку $\tilde{a}$, которая после замены переменной $\zeta=m^{-1}\left(r(\xi)\right)$ преобразуется ввиду неравенства $m(\xi)\geqslant r(\xi)$ в точку $a=r^{-1}\left(m(\tilde{a})\right)\geqslant r^{-1}\left(r(\tilde{a})\right)=\tilde{a}$, и множество, на котором требуется выполнение равенства $V(\xi)=v$, является подмножеством того, где выполнялось равенство в игре с ядрами K, $\tilde{L}$.

Теорема доказана.

Если игра на единичном квадрате имеет ситуацию равновесия, состоящую из функций распределения, не имеющих скачков в интервале (0, 1), то та же пара будет ситуацией равновесия для игры, в которой функции $k(\xi)$, $l(\xi)$ в интервале (0, 1) являются только ограниченными. Таким образом, из последней теоремы вытекает следствие.

Следствие 1. *В играх, имеющих ограниченные функции* $k(\xi)$, $l(\xi)$ *и удовлетворяющих условиям* 1), 6), 7), 8), 10), 11), 12), *существуют ситуации равновесия.*

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
1.IX.1971

Литература

1. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., „Мир", 1964.
2. Р. Д. Льюс, Х. Райфа, Игры и решения, М., ИЛЛ, 1961.
3. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, М., Гостехтеориздат, 1957.
4. Д. Суджюте, Вид спектров равновесных стратегий некоторых неантагонистических игр двух лиц на единичном квадрате, Liet. matem. rink., IX, № 3 (1969).
5. Д. Суджюте, Существование и вид равновесных стратегий некоторых неантагонистических игр двух лиц с выбором момента времени, Liet. matem. rink., X, № 2(1970).

NEANTAGONISTINIAI LOŠIMAI VIENETINIAME KVADRATE SU SKIRTINGOMIS BRANDUOLIŲ TRŪKIO FUNKCIJOMIS

D. Sūdžiūtė

(*Reziumė*)

Jeigu lošimo branduoliai yra monotoniški (3) sąlyga) srityse, į kurias padalija vienetinį kvadratą kreivės, tenkinančios 1) sąlygą, tai pusiausvyros strategijų spektrai yra tokio pavidalo, kaip nurodyta 1 teoremoje. Parodoma, kaip pusiausvyros strategijų spektrai priklauso nuo minėtų kreivių tarpusavio padėties (2—5 teoremos), kai tenkinamos 4) ir 5) sąlygos. Pakankamos sąlygos, kad pusiausvyros strategijų spektrai būtų aibėje $\{0, 1\}$, formuluojamos 6 teoremoje. Apibendrinamos pusiausvyros strategijų egzistavimo teoremos [5], kai dalijančios vienetinį kvadratą kreivės tenkina 1)—12) sąlygas.

NON-ZERO SUM GAMES ON THE UNITE SQUARE WITH THE DIFFERENT CURVES OF DISCONTINUITY OF THE KERNELS

D. Sūdžiūtė

(Summary)

The unite square is divided into subsets by means of the curves under the conditions 1). If the kernels of the game are monotone (condition 3)) in the subsets. Then the shapes of the spectra of the equilibrium strategies are given in the theorem 1. It has been shown that the spectra depend on the allocation of the curves mentioned above, under the conditions 4) and 5) (theorems 2–5). The theorem 6 formulates the sufficient conditions the spectra of the equilibrium strategies in the set {0, 1}. There are given the more common theorems (from those in [5]) of existing of the equilibrium strategies, when the curves, dividing the unite square are under conditions 1)–12).