XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972

УДК. 519.21

О ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В $\mathbf{R}^k$.

Л. Саулис

Пусть $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ k-мерные векторы евклидова пространства $\mathbf{R}^k$. Пусть далее $\mathbf{x}'$ – транспонированный вектор, $|\mathbf{x}|$ – длина вектора $\mathbf{x}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – скалярное произведение; $\mathbf{0}$ – нулевой вектор, $\mathbf{e}_m$ – единичный вектор в $\mathbf{R}^k$, т. е. m-я координата его равна единице, а остальные равны нулю.

Рассмотрим

$$\xi_j=(\xi_{j1}, \xi_{j2}, \ldots, \xi_{jk}), \qquad j=1, 2, \ldots \tag{1}$$

– последовательность независимых k-мерных случайных векторов (сл. в.) с $\mathbf{M}\xi_j=(\mathbf{M}\xi_{j1}, \mathbf{M}\xi_{j2}, \ldots, \mathbf{M}\xi_{jk})\equiv\mathbf{0}$, $\sigma_j^2=\mathbf{M}\,|\xi_j|^2<\infty$, $j=1, 2, \ldots$. Предположим, что сл. в. ξ_j имеет плотность распределения (п. р.) $p_j(\mathbf{x})$ ограниченную константой A_j, $j=1, 2, \ldots$.

Обозначим

$$\mathbf{S}_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j, \quad D_n=\mathbf{M}\,\mathbf{S}_n'\,\mathbf{S}_n, \quad B_n^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\,,$$

$$\mathbf{Y}_n=\mathbf{S}_n K_n, \quad \mathbf{Z}_n=\mathbf{S}_n M_n.$$

Здесь матрица K_n такова, что $K_n' D_n K_n=I$, где K_n' – транспонированная матрица, а I – единичная. M_n – диагональная матрица с m–м диагональным элементом B_{nm}^{-1}, где B_{nm}^2 – m–й диагональный элемент матрицы D_n, $m=1, 2, \ldots, k$.

Обозначим далее $f_j(t)$ характеристическую функцию (х.ф.) сл. в. ξ_j; $U_n(\mathbf{x})$, $u_n(\mathbf{x})$ и $f_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{t})$ – функцию распределения (ф.р.), п.р. и х.ф. сл. в. $\mathbf{Y}_n$; $V_n(\mathbf{x})$, $v_n(\mathbf{x})$ и $f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{t})$ – ф. р., п. р. и х. ф. сл. в. $\mathbf{Z}_n$ и $\Phi(\mathbf{x}; T)$, $\varphi(\mathbf{x}; T)$ и $h(\mathbf{t}; T)$ – k-мерную нормальную ф.р., п. р. и х. ф. с параметрами $\mathbf{0}$ и T.

Ковариационную матрицу сл. в. $\mathbf{S}_n$, $\mathbf{Z}_n$ $(\mathbf{Y}_n)$ обозначим соответственно D_n, $\tilde{D}_n$ (I), собственные числа матрицы D_n – $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, а ее максимальное собственное значение – λ_1 (D_n). Квадратичную форму, соответствующую D_n, $\tilde{D}_n$ (I), обозначим через $\mathbf{t}D_n\mathbf{t}'$, $\mathbf{t}\tilde{D}_n\mathbf{t}'$ $(\mathbf{t}I\mathbf{t}')$.

Теорема 1. *Если для последовательности* (*1*) *выполнены условия*:

1) $\sup\limits_{\mathbf{x}} |U_n(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{x}; I)|\to\mathbf{0}$ при $n\to\infty$,

2) *существует константа M такая, что для всех $j=1, 2, \dots$,*

$$\sigma_j^k A_j \leqslant M,$$

3) $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j \leqslant B_n^{\rho}, \qquad \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j \geqslant B_n^{-R},$

где ρ и R положительные числа, причем $\rho<1$, а R — конечно, то

$$\sup_{\mathbf{x}} (1+|\mathbf{x}|^2)\, |u_n(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x};\, I)| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Теорема 2. *Если для последовательности (1) выполнены условия 2) и 3) теоремы 1 и условие*

$$1') \ \sup_{\mathbf{x}} |V_n(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{x};\, T)| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

где T не вырождена, то

$$\sup_{\mathbf{x}} (1+|\mathbf{x}|^2)\, |v_n(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x};\, T)| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Заметим, что утверждение теоремы 1 (2) равносильно утверждению: для всех $0\leqslant m\leqslant 2$,

$$\sup_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}|^m\, |u_n(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x};\, I)| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

$$\Big(\sup_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}|^m\, |v_n(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x};\, T)| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty\Big).$$

При $k=1$ и $m=0$ обе теоремы превращаются в одну теорему, которая впервые была сформулирована в [1] и в несколько более общей форме доказана в [3]. Наиболее общий результат получен в [2].

Теоремы 1 и 2 при $k>1$ и $m=0$ приведены в [5], причем вместо условия 3 используется менее ограничительное условие

$$\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j}{B_n} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{2}$$

При более общих условиях эти теоремы доказаны в [6].

При $k=1$ и $0\leqslant m\leqslant 2$ обе теоремы превращаются в одну теорему, которая доказана в [3].

Для доказательства теорем нам понадобится несколько лемм.

Лемма 1 (*см.* 5). *Если k-мерный сл. в. ξ имеет п.р. $p(\mathbf{x})$, ограниченную константой A и $\sigma^2=\mathbf{M}\,|\xi|^2<\infty$, то для х.ф. $f(\mathbf{t})$ справедливо неравенство*

$$\sup_{|\mathbf{t}|>\frac{\pi}{\sigma}} |f(\mathbf{t})| \leqslant 1-\frac{C_k}{\sigma^{2k} A^2},$$

где $C_k=C'Q_{k-1}^2$, C' — абсолютная константа, а Q_{k-1} — объем $(k-1)$-мерной единичной сферы.

Следующая лемма является многомерным аналогом известной леммы Крамера [7] стр. 37.

Лемма 2 (*см.* 5). *Если $f(\mathbf{t})$ многомерная х.ф., такая, что $|f(\mathbf{t})|\leqslant p<1$ при $|\mathbf{t}|\geqslant b$, то при $|\mathbf{t}|<b$*

$$|f(\mathbf{t})| \leqslant \exp\left\{-\frac{1-p^2}{8b^2}\,|\mathbf{t}|^2\right\}.$$

Лемма 3. *Если*

$$\sup_{\mathbf{x}} |u_n(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x};\ I)| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

равномерно, то

$$\frac{\partial^2 f_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{t})}{\partial t_m^2} \to \frac{\partial^2 h(\mathbf{t};\ I)}{\partial t_m^2} \qquad \text{при} \qquad n\to\infty$$

равномерно, $m=1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Доказательство. Из определения $u_n(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x};\ I)$ вытекает, что

$$\int_{\mathbf{R}^k} (\mathbf{x},\ \mathbf{e}_m)\, u_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}=0, \qquad \int_{\mathbf{R}^k} (\mathbf{x},\ \mathbf{e}_m)^2\, u_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}=1,$$

$$\int_{\mathbf{R}^k} (\mathbf{x},\ \mathbf{e}_m)\, \varphi(\mathbf{x};\ I)\, d\mathbf{x}=0,$$

и

$$\int_{\mathbf{R}^k} (\mathbf{x},\ \mathbf{e}_m)^2\, \varphi(\mathbf{x};\ I)\, d\mathbf{x}=1, \qquad m=1,\ 2,\ldots,k.$$

Для каждого $\varepsilon>0$ найдется $R=R(\varepsilon)$ такое, что

$$\int_{\mathbf{R}^k} (\mathbf{x},\ \mathbf{e}_m)^2\, \varphi(\mathbf{x};\ I)\, d\mathbf{x}>1-\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Теперь уже для фиксированного $R=R(\varepsilon)$ найдется номер $n_0(R)= =n_0(\varepsilon)$ такой, что для всех $n>n_0(\varepsilon)$

$$|u_n(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x};\ I)|<\frac{3\varepsilon}{2^{k+1}\,R^{k+2}}\ .$$

Тогда

$$\int_{|\mathbf{x}|\leqslant R} (\mathbf{x},\ \mathbf{e}_m)^2\, u_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}> \int_{|\mathbf{x}|\leqslant R} (\mathbf{x},\ \mathbf{e}_m)^2\, \varphi(\mathbf{x};\ I)\, d\mathbf{x}+$$

$$-\frac{3\varepsilon}{2^{k+1}\,R^{k+2}} \int_{|\mathbf{x}|\leqslant R} (\mathbf{x},\ \mathbf{e}_m)^2\, d\mathbf{x} \geqslant \int_{|\mathbf{x}|\leqslant R} (\mathbf{x},\ \mathbf{e}_m)^2\, \varphi(\mathbf{x};\ I)\, d\mathbf{x}-\frac{\varepsilon}{2}>$$

$$>1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=1-\varepsilon.$$

Отсюда

$$\int_{|\mathbf{x}|>R} (\mathbf{x},\ \mathbf{e}_m)^2\, u_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}<\varepsilon\ ,$$

для всех $n>n_0(\varepsilon)$ и $m=1,\ 2,\ \ldots,\ k$.
Далее имеем

$$\frac{\partial^2 f_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{t})}{\partial t_m^2}-\frac{\partial^2 h(\mathbf{t};\ I)}{\partial t_m^2}=-\int_{\mathbf{R}^k} e^{i(\mathbf{t},\ \mathbf{x})}(\mathbf{x},\ \mathbf{e}_m)^2 \Big(u_n(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x};\ I)\Big)\, d\mathbf{x}.$$

Следовательно, для всех $n>n_0(\varepsilon)$ и $m=1, 2, \ldots, k$

$$\left|\frac{\partial^2 f_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{t})}{\partial t_m^2}-\frac{\partial^2 h(\mathbf{t};\ I)}{\partial t_m^2}\right| \leqslant \int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant R} (\mathbf{x},\ \mathbf{e}_m)^2\ |u_n(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x};\ I)|\, d\mathbf{x}+\varepsilon+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\frac{3\varepsilon}{2^{k+1}\ R^{k+2}}\int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant R}(\mathbf{x},\ \mathbf{e}_m)^2\, d\mathbf{x}+\frac{3}{2}\ \varepsilon=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{3}{2}\ \varepsilon=2\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Справедливость теоремы для $m=0$ следует легко, ибо согласно [5] достаточно показать, что

$$\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j}{B_n}\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Действительно, из условия 3 следует, что

$$\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j}{B_n}\leqslant B_n^{\rho-1}, \qquad 0<\rho<1. \tag{3}$$

Далее пусть $B_n\to C$, где C — некоторая постоянная. Тогда, ввиду условия $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j\geqslant B_n^{-R}$, $B_n\to\infty$. Полученное противоречие позволяет утверждать, что $B_n\to\infty$. Следовательно, возвращаясь к неравенству (3), получаем соотношение (2).

Остается доказать теорему для $m=2$. Так как сл. в. ξ_j последовательности (1) имеют ограниченные плотности, то и сл. в $\mathbf{Y}_n$ будет иметь плотность и

$$u_n(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{\mathbf{R}^k} e^{-i(\mathbf{t},\ \mathbf{x})} f_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}.$$

Отсюда находим, что

$$(2\pi)^k\,|\mathbf{x}|^2\ |u_n(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x};\ I)|\leqslant\sum_{m=1}^{k}\ \int\limits_{\mathbf{R}^k}\left|\frac{\partial^2 f_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{t})}{\partial t_m^2}+\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 h(\mathbf{t};\ I)}{\partial t_m^2}\right|d\mathbf{t}\leqslant\sum_{m=1}^{k}\left(I_m^{(1)}+I_m^{(2)}+I_m^{(3)}+I_m^{(4)}+I_m^{(5)}\right). \tag{4}$$

Здесь

$$\varphi(\mathbf{x};\ I)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\ |I|^{\frac{1}{2}}}\ \exp\left\{-\frac{\mathbf{x}I\mathbf{x}'}{2}\right\}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\ \exp\left\{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}\right\} \tag{5}$$

— плотность предельного нормального закона,

$$I_m^{(1)}=\int\limits_{|\mathbf{t}|\leqslant A}\left|\frac{\partial^2 f_{\mathbf{Y}_n}(t)}{\partial t_m^2}-\frac{\partial^2 h(\mathbf{t};\ I)}{\partial t_m^2}\right|d\mathbf{t},$$

$$I_m^{(2)}=\int\limits_{|\mathbf{t}|>A}\left|\frac{\partial^2 h(\mathbf{t};\ I)}{\partial t_m^2}\right|d\mathbf{t}, \qquad I_m^{(3)}=\int\limits_{A<|\mathbf{t}|\leqslant\frac{\pi B_n}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j}}\left|\frac{\partial^2 f_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{t})}{\partial t_m^2}\right|d t,$$

$$I_m^{(4)} = \int\limits_{\frac{\pi B_n}{\max\limits_{1\le j\le n} \sigma_j} < |\mathbf{t}| \le \frac{\pi B_n}{\min\limits_{1\le j\le n} \sigma_j}} \left| \frac{\partial^2 f_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{t})}{\partial t_m^2} \right| d\mathbf{t},$$

$$I_m^{(5)} = \int\limits_{|\mathbf{t}| > \frac{\pi B_n}{\min\limits_{1\le j\le n} \sigma_j}} \left| \frac{\partial^2 f_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{t})}{\partial t_m^2} \right| d\mathbf{t},$$

а

$$h(\mathbf{t};\, I) = \exp\left\{-\frac{\mathbf{t} I \mathbf{t}'}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}\right\}. \tag{6}$$

Перейдем к оценке интегралов. Согласно условиям теоремы и лемме 3 интеграл $I_m^{(1)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Далее, нетрудно проверить, что

$$\left| \frac{\partial^\nu \mathbf{t} I \mathbf{t}'}{\partial t_m^\nu} \right| \le 2k (\mathbf{t} I \mathbf{t}')^{\frac{2-\nu}{2}} = 2k\, |\mathbf{t}|^{2-\nu}, \tag{7}$$

для $\nu = 0, 1, 2$ и $m = 1, 2, \ldots, k$. Из определения $h(t;\, I)$ получаем, что

$$\frac{\partial^2 h(\mathbf{t};\, I)}{\partial t_m^2} = e^{-\frac{\mathbf{t} I \mathbf{t}'}{2}} \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial t_m}(\mathbf{t} I \mathbf{t}')\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial t_m^2}(\mathbf{t} I \mathbf{t}')\right].$$

Отсюда, согласно оценке (7),

$$\left| \frac{\partial^2 h(\mathbf{t};\, I)}{\partial t_m^2} \right| \le e^{-\frac{\mathbf{t} I \mathbf{t}'}{2}} \left(k + k^2 (\mathbf{t} I \mathbf{t}')\right). \tag{8}$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$I_m^{(2)} \le \int\limits_{|\mathbf{t}| > A} e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}} (k + k^2\, |\mathbf{t}|^2)\, d\mathbf{t} \le \varepsilon,$$

лишь только A достаточно велико.

Заметим, что

$$f_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{t}) = f_{\mathbf{S}_n}(\mathbf{t} K_n') = \prod_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{t} K_n'), \tag{9}$$

$$\frac{\partial f_j(\mathbf{t} K_n')}{\partial t_m} = i \int\limits_{\mathbf{R}^k} e^{i(\mathbf{t} K_n', \mathbf{x})}\, \frac{\partial (\mathbf{t} K_n',\, \mathbf{x})}{\partial t_m}\, p_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} =$$

$$= i \int\limits_{\mathbf{R}^k} \left(1 + i(\mathbf{t} K_n',\, \mathbf{x})\, e^{i\Theta(\mathbf{t} K_n',\, \mathbf{x})}\right) (\mathbf{x} K_n,\, \mathbf{e}_m)\, p_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

где Θ обозначает некоторую величину, не превосходящую единицы по модулю. Отсюда получаем, что

$$\left| \frac{\partial f_j(\mathbf{t} K_n')}{\partial t_m} \right| \le \int\limits_{\mathbf{R}^k} |(\mathbf{x} K_n,\, \mathbf{t})|\; |(\mathbf{x} K_n,\, \mathbf{e}_m)|\; p_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \le$$

$$\le |\mathbf{t}| \int\limits_{\mathbf{R}^k} |\mathbf{x} K_n|^2\, p_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = |\mathbf{t}|\, \mathbf{M}\, |\xi_j K_n|^2,$$

а

$$\left|\frac{\partial^2 f_j(\mathbf{t} K_n')}{\partial t_m^2}\right| \leqslant \mathbf{M}\, |\xi_j K_n|^2.$$

Следовательно, используя, что $K_n' D_n K_n = I$, находим

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_j(\mathbf{t} K_n')}{\partial t_m}\right| \leqslant |\mathbf{t}| \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}\, |\xi_j K_n|^2 =$$

$$= |\mathbf{t}| \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}(\xi_j,\ \xi_j K_n K_n') = |\mathbf{t}| \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}(\xi_j,\ \xi_j D_n^{-1}) = k\, |\mathbf{t}| \tag{10}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 f_j(\mathbf{t} K_n')}{\partial t_m^2}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}\, |\xi_j K_n|^2 = k. \tag{11}$$

Но, так как

$$\frac{\partial^2 f_{S_n}(\mathbf{t} K_n')}{\partial t_m^2} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f_l(\mathbf{t} K_n')}{\partial t_m^2} \cdot \prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} f_j(\mathbf{t} K_n') +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_l(\mathbf{t} K_n')}{\partial t_m} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} \frac{\partial f_j(\mathbf{t} K_n')}{\partial t_m} \cdot \prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq l}}^{n} f_r(\mathbf{t} K_n'), \tag{12}$$

то, согласно неравенствам (10) и (11), получаем

$$\left|\frac{\partial^2 f_{Y_n}(\mathbf{t})}{\partial t_m^2}\right| = \left|\frac{\partial^2 f_{S_n}(\mathbf{t} K_n')}{\partial t_m^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant j\neq l\leqslant n} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq l}}^{n} |f_r(\mathbf{t} K_n')|\ (k + k^2\, |\mathbf{t}|^2). \tag{13}$$

Ввиду леммы 1

$$\sup_{|\mathbf{t}| > \frac{\pi}{\sigma_j}} |f_j(\mathbf{t})| \leqslant 1 - \frac{C_k}{\sigma_j^{2k} A_j^2}, \tag{14}$$

и согласно лемме 2 и второму условию теоремы

$$\sup_{|\mathbf{t}| < \frac{\pi}{\sigma_j}} |f_j(\mathbf{t})| \leqslant \exp\left\{-\frac{C_k \sigma_j^2}{8\pi^2 \sigma_j^{2k} A_j^2}\ |\mathbf{t}|^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{C_k \sigma_j^2}{8\pi^2 M^2}\ |\mathbf{t}|^2\right\}. \tag{15}$$

Вспомнив соотношение (2) при достаточно больших n, находим, что в интервале $|\mathbf{t}| \leqslant \dfrac{\pi}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j}$,

$$\max_{1\leqslant j\neq l\leqslant n} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq l}}^{n} |f_r(\mathbf{t})| \leqslant \exp\left\{-\frac{C_k B_n^2}{16\pi^2 M^2}\ |\mathbf{t}|^2\right\}. \tag{16}$$

Из неравенства (13) следует, что

$$I_m^{(3)} \leqslant \int\limits_{A<|t|\leqslant \frac{\pi B_n}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j}} \max_{1\leqslant j\neq l\leqslant n} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq l}}^{n} |f_r(\mathbf{t}K_n')|\,(k+k^2|\mathbf{t}|^2)\,d\mathbf{t}.$$

Произведем замену переменных $\mathbf{t}K_n'=\mathbf{t}'$. Как легко усмотреть якобиан преобразования

$$|K^{-1}_n|=\sqrt{|D_n|}=\sqrt{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k}\leqslant\prod_{m=1}^{k}B_{nm}\leqslant B_n^k$$

и

$$|\mathbf{t}'(K_n^{-1})'|^2\leqslant\lambda_1\left((K^{-1}_n)'\,(K^{-1}_n)\right)|\mathbf{t}'|^2=\lambda_1(D_n)\,|\mathbf{t}'|^2\leqslant B_n^2\,|\mathbf{t}'|^2,$$

так как собственные значения матрицы положительные и

$$\sum_{m=1}^{k}\lambda_m=\sum_{m=1}^{k}B_{nm}^2=B_n^2.$$

Используя неравенство (16), имеем

$$I_m^{(3)}\leqslant B_n^k \int\limits_{A<|\mathbf{t}(K^{-1}_n)|\leqslant\frac{\pi B_n}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j}} \max_{1\leqslant j\neq l\leqslant n}\prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq l}}^{n}|f_r(\mathbf{t})|\,(k+k^2B_n^2|\mathbf{t}|^2)\,d\mathbf{t}\leqslant$$

$$\leqslant B_n^k\int\limits_{|\mathbf{t}|>\frac{A}{B_n}}\exp\left\{-\frac{C_kB_n^2|\mathbf{t}|^2}{16\pi^2M}\right\}(k+k^2B_n^2\,|\mathbf{t}|^2)\,d\mathbf{t}\leqslant$$

$$\leqslant B_n^k\exp\left\{-\frac{C_kA^2}{32\pi^2M}\right\}\cdot\int\limits_{\mathbf{R}^k}\exp\left\{-\frac{C_kB_n^2\,|\mathbf{t}|^2}{32\pi^2M}\right\}\cdot$$

$$\cdot\,(k+k^2B_n^2\,|\mathbf{t}|^2)\,d\mathbf{t}\leqslant\left(\frac{3\sqrt{2M}\,\pi}{\sqrt{C_k}}\right)^k\exp\left\{-\frac{C_kA^2}{32\pi^2M}\right\}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\mathbf{R}^k}\exp\left\{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}\right\}\left(k+\frac{18\pi^2M}{C_k}\,k^2\,|\mathbf{t}|^2\right)d\mathbf{t}\to0,$$

если только $A\to\infty$, так как $|\mathbf{t}|^2e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}}$ интегрируемая функция в $\mathbf{R}^k$. Теперь оценим $I_m^{(4)}$. Принимая во внимание неравенство (13) и производя замену переменных, как и при оценке интеграла $I_m^{(3)}$, находим

$$I_m^{(4)}\leqslant\left(k+k^2\,\frac{\pi^2B_n^2}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j^2}\right)\cdot B_n^k\,\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\frac{\pi B_n}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j}\leqslant|\mathbf{t}(K_n')^{-1}|\leqslant\frac{\pi B_n}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j}}\max_{1\leqslant j\neq l\leqslant n}\prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq l}}^{n}|f_r(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}. \tag{17}$$

Из неравенств (14) и (15) получаем, что в интервале

$$\frac{\pi B_n}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j} \leqslant |\mathbf{t}(K_n')^{-1}| \leqslant \frac{\pi B_n}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j},$$

$$|f_r(\mathbf{t})| \leqslant \exp\left\{-\frac{C_k}{8M} \frac{\sigma_r^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j^2}\right\}.$$

Следовательно,

$$\max_{1\leqslant j\neq l\leqslant n} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq l}}^{n} |f_r(\mathbf{t})| \leqslant |f_{L_1}(\mathbf{t})|\cdot|f_{L_2}(\mathbf{t})|\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{C_k}{8M} \sum_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq l\\ r\neq L_1\neq L_2}}^{n} \frac{\sigma_r^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j^2}\right\} \leqslant |f_{L_1}(\mathbf{t})|\cdot|f_{L_2}(\mathbf{t})|\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{4C_k}{8M}\right\} \exp\left\{-\frac{C_k B_n^2}{8M \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j^2}\right\}.$$

Отсюда, согласно неравенству (17), многомерному равенству Парсеваля и третьему условию теоремы, имеем

$$I_m^{(4)} \leqslant \left(k + k^2 \frac{\pi^2 B_n^2}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j^2}\right) \exp\left\{\frac{4C_k}{8M}\right\}\cdot$$

$$\cdot B_n^k \exp\left\{-\frac{C_k B_n^2}{8M \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j^2}\right\}\cdot \int\limits_{\mathbf{R}^k} |f_{L_1}(\mathbf{t})|\, |f_{L_2}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^k \sqrt{A_{L_1} A_{L_2}} \exp\left\{\frac{4C_k}{8M}\right\} (k + k^2 \pi^2 B_n^{2(R+1)}) \cdot$$

$$\cdot B_n^k \exp\left\{-\frac{C_k}{8M} B_n^{2(1-\rho)}\right\} \to 0$$

при $n\to\infty$.

Осталось оценить $I_m^{(5)}$. Воспользовавшись обобщенным неравенством Гельдера ([4] стр. 197), находим

$$\left|\frac{\partial}{\partial t_m} f_j(\mathbf{t}K_n')\right| = \left| i \int\limits_{\mathbf{R}^k} e^{i(\mathbf{t}K_n',\, \mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial t_m} (\mathbf{t}K_n',\, \mathbf{x})\, p_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbf{R}^k} |(\mathbf{x}K_n,\, \mathbf{e}_m)|\, p_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant \left(\int\limits_{\mathbf{R}^k} |\mathbf{x}K_n|^2\, p_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{M}\,|\xi_j K_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда,

$$\sum_{l=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial t_m} f_l(\mathbf{t}K_n')\right| \leqslant \sum_{l=1}^{n} (\mathbf{M}\,|\xi_l K_n|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \mathbf{M}\,|\xi_l K_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{kn}\,. \tag{18}$$

Используя неравенства (11) и (18) из соотношения (12), получаем, что

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial t_m^2} f_{Y_n}(\mathbf{t}) \right| \leqslant k(n+1) \max_{1 \leqslant j \neq l \leqslant n} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j \neq l}}^{n} |f_r(\mathbf{t} K_n')|. \tag{19}$$

Согласно лемме 1 и второму условию теоремы при

$$|\mathbf{t}| \geqslant \frac{\pi}{\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sigma_j},$$

$$\max_{1 \leqslant j \neq l \leqslant n} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j \neq l}}^{n} |f_r(\mathbf{t})| \leqslant |f_{L_1}(\mathbf{t})| \cdot |f_{L_2}(\mathbf{t})| \exp\left\{ -\frac{C_k}{M}(n-4) \right\}. \tag{20}$$

Следовательно, используя неравенства (19), (20), аналогично как и при оценке интеграла $I_m^{(4)}$, получаем

$$I_m^{(5)} \leqslant k(n+1) B_n^k \int\limits_{|\mathbf{t}(K_n^{-1})'| \geqslant \frac{\pi B_n}{\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sigma_j}} \max_{1 \leqslant j \neq l \leqslant n} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j \neq l}} |f_r(t)|\, d\mathbf{t} \leqslant$$

$$\leqslant k(n+1) B_n^k \exp\left\{ -\frac{C_k}{M}(n-4) \right\} \cdot \int\limits_{\mathbf{R}^k} |f_{L_1}(\mathbf{t})|\, |f_{L_2}(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^k (A_{L_1} A_{L_2})^{\frac{1}{2}} k(n+1) B_n^k \exp\left\{ -\frac{C_k}{M}(n-4) \right\}.$$

Согласно соотношению $B_n = o(e^{\beta(k) n})$, $\beta(k) > 0$, имеем

$$I_m^{(5)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 ведется по схеме доказательства теоремы 1, с некоторыми изменениями, не приводящими к затруднениям. Заметим лишь, что из условия теоремы 2 вытекает, что

$$\sup_{\mathbf{x}} |v_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}; T)| \to 0$$

при $n \to \infty$ и дословно следуя доказательству леммы 3 нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial^2 f_{Z_n}(\mathbf{t})}{\partial t_m^2} \to \frac{\partial^2 h(\mathbf{t}; T)}{\partial t_m^2} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Далее задача доказательства, что

$$\int\limits_{|\mathbf{t}| > H} \left| \frac{\partial^2}{\partial t_m^2} f_{Z_n}(\mathbf{t}) \right| d\mathbf{t} = \int\limits_{|\mathbf{t}| > H} \left| \frac{\partial^2}{\partial t_m^2} f_{S_n}(\mathbf{t} M_n') \right| d\mathbf{t} \to 0$$

при $n \to \infty$, облегчается ввиду диагональности матрицы M_n.

Нормировка S_n матрицей M_n переводит ковариационную матрицу D_n в матрицу корреляции, которая, естественно может вырождаться при $n \to \infty$. Нормировка S_n более общего вида матрицей K_n переводит ковариационную матрицу D_n в диагональную матрицу с единичными диагональными элементами. Таким образом, теорема 1, отличающаяся от теоремы 2 лишь способом нормировки S_n, охватывает более общий класс последовательностей сл. в., ибо из выполнения условия 1′ следует выполнение условия 1, но не наоборот.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
10.XI.1971

Литература

1. Ю. В. Прохоров, В сб. „Предельные теоремы теории вероятностей", Ташкент, 1963, 76–80.
2. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., **10**, 4 (1965), 645–659.
3. П. Сурвила, О локальной предельной теореме для плотностей, Liet. matem. rink., III, № 2 (1963), 225–236.
4. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, и Г. Полиа, Неравенства, М., ИЛ, 1948.
5. Г. Л. Шервашидзе, Л. И. Саулис, О многомерных предельных теоремах для плотностей распределения, Сообщения АН Грузинской ССР, **60**, № 3 (1971), 533–536.
6. Р. Лапинскас, О локальной предельной теореме и асимптотических разложениях для плотностей в многомерном случае, Liet. matem. rink., XI, № 4 (1971), 817–832.
7. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, М., ИЛ, 1947.
8. Л. Саулис, Асимптотические разложение для плотности распределения сумм независимых неодинаково распределенных многомерных случайных величин, Liet. matem. rink., XI, № 3 (1971), 651–664.
9. W. L. Smith, A Frequency — function from of the central limit theorem, Proc. Combridge Philos. Soc., **49**, 3 (1953), 462–472.

APIE PASKIRSTYMO TANKIŲ ERDVĖJE R^k RIBINĘ LOKALINĘ TEOREMĄ

L. Saulis

(*Reziumė*)

Nagrinėjame $\{\xi_j\}$ $(j=1,2,\ldots)$ – seką k-mačių nepriklausomų atsitiktinių vektorių iš euklidinės erdvės R^k su vidurkių vektoriumi $M\xi_j=0, \sigma_j^2=\sum_{i=1}^{k} M\,\xi_{ji}^2$ ir aprėžtais tankiais $p_j(\mathbf{x})\leq A_j, j=1,2,\ldots$.

Pažymėkime

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j, \qquad D_n=M\,S_n'\,S_n\ ,$$

S_n' – transponuotas vektorius, $|\mathbf{x}|$ – vektoriaus $\mathbf{x}$ ilgis, $Y_n=S_nK_n$, $u_n(\mathbf{x})$ – atsitiktinio vektoriaus Y_n tankis.

Matrica K_n tokia, kad $K_n'D_nK_n=I$; čia K_n' – transponuota matrica, o I – vienetinė matrica.

Darbe gautos pakankamos sąlygos, kad

$$\sup_{\mathbf{x}}\,(1+|\mathbf{x}|^2)\left|u_n(\mathbf{x})-\frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\,e^{-\frac{|x|^2}{2}}\right|\to 0, \qquad \text{kai } n\to\infty.$$

Analogiškas rezultatas teisingas, normuojant sumą S_n kitu būdu.

ON THE LOCAL LIMIT THEOREM FOR THE DENSITIES IN THE SPACE $\mathbf{R}^k$

L. Saulis

(*Summary*)

Let $\{\xi_j\}$ $(j=1, 2, \ldots)$ be a sequence of k – dimensional independent random vectors with the mean vector $\mathbf{M}\xi_j=0$, $\sigma_j^2 = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{M}\xi_{ji}^2$ and the bounded densities $p_j(x) \leqslant A_j$, $j=1, 2, \ldots$.

Denote

$$\mathbf{S}_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \qquad D_n = M\,\mathbf{S}_n'\,\mathbf{S}_n,$$

$\mathbf{S}_n'$ is transposed vector, $|\mathbf{x}|$ is the modulus of the vector $\mathbf{x}$,
$\mathbf{Y}_n=\mathbf{S}_n K_n$, $u_n(\mathbf{x})$ is the density of the vector $\mathbf{Y}_n$.

The matrix K_n is such, that $K_n' D_n K^n = I$, where K_n' is a transposed matrix, I is unit one.

In this paper the sufficient conditions for the relation

$$\sup_{\mathbf{x}} \,(1+|\mathbf{x}|^2)\left| u_n(\mathbf{x}) - \frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\, e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}} \right| \to 0 \qquad \text{as} \quad n\to\infty$$

to hold are obtained.

Analogous result holds for the sums $\mathbf{S}_n$ normed in a different manner.