Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 602–606

Stacionarieji uždaviniai su įvairaus tipo nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis

Artūras ŠTIKONAS (MII), Olga ŠTIKONIENĖ (MII), Sigita PEČIULYTĖ (VDU)
el. paštas: arturas.stikonas@fm.vtu.lt, olgast@ktl.mii.lt, s.peciulyte@if.vdu.lt

1. Stacionarieji uždaviniai su nelokaliomis sąlygomis

Paskutiniaisiais metais aktyviai vystoma neklasikinių diferencialinių uždavinių teorija. Kraštiniai uždaviniai su nelokaliomis sąlygomis yra viena iš tokių sričių. Skaitinių metodų tokiems kraštiniams uždaviniams kūrimas ir jų teorinis pagrindimas yra aktualus skaičiuojamojoje matematikoje. Šie uždaviniai tiriami tiek užsienio, tiek Lietuvos mokslininkų darbuose (žr. [3, 5, 6] ir ten cituojamą literatūrą). Darbuose [3, 5] buvo surastos būtinos ir pakankamos kai kurių kraštinių uždavinių išsprendžiamumo sąlygos. Šiame darbe mes siekėme apibendrinti rezultatus, paskelbtus straipsnyje [4], kai kraštinio uždavinio koeficientai yra nepastovūs, o kraštinės sąlygos yra įvairesnės.

Nagrinėsime stacionarųjį kraštinį uždavinį su nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis:

$$L(u) := -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big) + q(x)u = f, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$L_0(u) := \gamma_0 < k_0, u > + g_0, \tag{2}$$

$$L_1(u) := \gamma_1 < k_1, u > + g_1, \tag{3}$$

čia $p(x) \geqslant p_0 > 0,\ q(x) \geqslant q_0 \geqslant 0$. Kraštinės sąlygos gali būti pirmojo tipo

$$L_l(u) := u|_{x=l}$$

arba

$$L_l(u) := \Big((-1)^{l+1}p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + r(x)u\Big)\Big|_{x=l},$$

$l = 0, 1$. Kai $r(l) = 0$, tai kraštinė sąlyga yra antrojo tipo. Atvejis $r(l) > 0$ atitinka trečiojo tipo kraštinę sąlygą. Jeigu abi kraštinės sąlygos (kai $x = 0, l$) yra antrojo tipo, tai papildomai reikalausime $q(x) \geqslant q_0 > 0$. Nelokalios sąlygos apibrėžiamos tiesiniais funkcionalais k_l:

$$< k_l, u > := \sum_{j=1}^{J} \alpha_l^j u(a_l^j) + \int_0^1 \big(\beta_l(x)u(x) + \bar{\beta}_l(x)u'(x)\big)\mathrm{d}x,$$

čia $0 \leqslant a_l^1 < \ldots < a_l^J \leqslant l$. Laikysime, kad koeficientai p, q, $\beta_l(x)$, $\bar{\beta}_l(x)$, $f(x)$ yra tokie, kad garantuojamas klasikinio ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) uždavinio išsprendžiamumas tam tikroje funkcijų klasėje (pvz., C^2 arba W_2^1). Koeficientai γ_1 ir γ_2 apibrėžia nelokališkumo svorį kraštinėje sąlygoje.

2. Baigtinių skirtumų schemos

Atkarpoje $[0, 1]$ apibrėžkime diskretųjį tinklą $\bar{\omega} = \bar{\omega}^h = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$, $h_i = x_i - x_{i-1}, 1 \leqslant i \leqslant n$. Formaliai laikysime, kad $h_0 = h_{n+1} = 0$, $x_{-1} = 0, x_{n+1} = l$. Naudosime papildomus diskrečiuosius tinklus: $\omega^h = \bar{\omega}^h \setminus \{x_0, x_n\}$, $\omega^h_{1/2} = \{x_{i+\frac{1}{2}} | x_{i+\frac{1}{2}} = (x_i + x_{i+1})/2, \ -1 \leqslant i \leqslant n\}$, $h_{i+\frac{1}{2}} = (h_i + h_{i+1})/2, 0 \leqslant i \leqslant n$. Apibrėžkime diskrečiuosius operatorius, skaliarines sandaugas ir normas:

$$
\begin{aligned}
&(\delta U)_{i+\frac{1}{2}} := (U_{i+1} - U_i)/h_{i+1}, && (\delta V)_i := (V_{i+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2}})/h_{i+\frac{1}{2}},\\
&(U, V)_{\omega^h} := \sum_{i=0}^{n} U_i V_i h_{i+\frac{1}{2}}, && (U, V)_{\omega^h_{1/2}} := \sum_{i=1}^{n} U_{i-\frac{1}{2}} V_{i-\frac{1}{2}} h_i,\\
&\|Z\|_{\infty,\omega} := \max_{x\in\omega} |Z(x)|, && \|U\|_{1,\bar{\omega}^h} := \sum_{i=0}^{n} |U_i| h_{i+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Funkcijų reikšmėms ne tinklo taškuose naudosime tiesinį interpoliavimą $Z(x) := \frac{x_i - x}{h_i} Z_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} Z_i$, kai $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Užrašykime antros eilės baigtinių skirtumų schemas (1)–(3) stacionariesiems uždaviniams:

$$L(U) := -\delta(P\delta U) + QU = F, \tag{4}$$
$$L_0(U) := \gamma_0 < K_0, U > + g_0, \tag{5}$$
$$L_1(U) := \gamma_1 < K_1, U > + g_1, \tag{6}$$

čia

$$L_l(U) := U|_{i=nl}$$

arba

$$L_l(U) := (-1)^{l+1} (P\delta U)|_{i=nl+(-1)^l 1/2} + R_{nl} U_{nl} - h_{nl+1/2}(F_{nl} - Q_{nl} U_{nl}),$$

o K_l yra tiesiniai diskretieji funkcionalai

$$< K_l, U > := \sum_{j=1}^{J} \alpha_l^j U(a_l^j) + (B_l, U) + (\overline{B}_l, \delta U).$$

Kaip ir diferencialiniame uždavinyje laikysime, kad $P \geqslant p_0 > 0$, $R_l \geqslant 0$, $Q \geqslant q_0 \geqslant 0$ (jei abi kraštinės sąlygos yra antrojo tipo, tuomet $q_0 > 0$). Visų šių skirtumų schemų aproksimacija pakankamai glodiems sprendiniams (pvz., C^4 klasėje ir prie atitinkamų glodumo reikalavimų (1)–(3) uždavinio koeficientams) ir tolygiam tinklui yra $\mathcal{O}(h^2)$ eilės. Žymėsime $G_0 = g_0$, $G_n = g_1$.

3. Klasikinio uždavinio analizė

Kai $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$, tuomet sprendžiame klasikinius kraštinius uždavinius. Jeigu kairiajame (dešiniajame) krašte duota antrojo arba trečiojo tipo kraštinė sąlyga, priimsime, kad

$P_{-1/2} = 0$ ($P_{n+1/2} = 0$). Tinklo taškus, kuriuose yra pirmojo tipo kraštinė sąlyga, priskirsime tinklui $\partial\omega \subset \{x_0, x_n\}$. Tada (4)–(6) skirtumų schemą patogu perrašyti pavidalu

$$\widetilde{L}(U) := -\delta(P\delta U) + \widetilde{Q}U = \widetilde{F}, \quad x_i \in \omega = \bar{\omega}^h \setminus \partial\omega, \tag{7}$$

$$L_\partial(U) := U = G, \quad x_i \in \partial\omega, \tag{8}$$

čia $\widetilde{Q} = Q$, $\widetilde{F} = F$, kai $x_i \in \omega^h$, ir $\widetilde{Q}_i = Q_i + R_i/h_{i+1/2}$, $\widetilde{F}_i = F_i + G_i/h_{i+1/2}$ kituose taškuose. Kai $\partial\omega = \varnothing$, t.y. abi kraštinės sąlygos yra ne pirmojo tipo, apibrėžkime $\overline{U} \equiv 0$. Kitais atvejais $\overline{U}$ bus viena iš trijų funkcijų $\frac{x_i}{l}G_n + \frac{l-x_i}{l}G_0$, $\frac{x_i}{l}G_n$, $\frac{l-x_i}{l}G_0$. Tada funkcija $W = U - \overline{U}$ yra kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} \widetilde{L}(W) = -\delta(P\delta W) + \widetilde{Q}W = \widetilde{F} + \sqrt{\widetilde{Q}}\overline{F} - \delta(\sqrt{P}\overline{G}), \\ L_\partial(W) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

su $\overline{F} = \sqrt{\widetilde{Q}}\overline{U}$, $\overline{G} = \sqrt{P}\delta\overline{U}$. Kadangi $W|_{\partial\omega} = 0$, tai šiam uždaviniui teisinga energetinė nelygybė

$$\|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \|\sqrt{\widetilde{Q}}\delta W\|^2 \leqslant \|\widetilde{F}\|_1\|W\|_\infty + \|\sqrt{P}\delta W\|\,\|\overline{G}\| + \|\sqrt{\widetilde{Q}}W\|\,\|\overline{F}\|.$$

Pasinaudoję diskrečiąja Sobolevo įdėties teorema [1, 2]

$$\|W\|_\infty^2 \leqslant 2\big(l\|\delta W\|^2 + \min\{W_0^2, W_M^2, \|W\|^2/l\},$$

gauname

$$\begin{aligned} &\|W\|_\infty^2 + \|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \|\sqrt{\widetilde{Q}}\delta W\|^2 \\ &\quad \leqslant C(P,Q,R)\Big(\|\widetilde{F}\|_1\|W\|_\infty + \|\sqrt{P}\delta W\|\,\|\overline{G}\| + \|\sqrt{\widetilde{Q}}W\|\,\|\overline{F}\|\Big), \end{aligned}$$

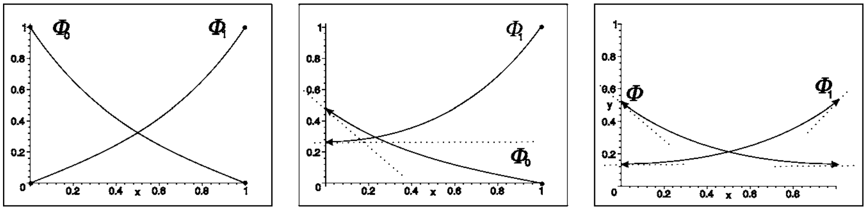
ir $C(P,Q,R) \leqslant 2\big(l/p_0 + 1/\max(lq_0, R_0, R_N)\big)$. Iš šios nelygybės išplaukia įverčiai

$$\begin{aligned} &\|W\|_\infty + \|\delta W\| \leqslant C\big(\|\widetilde{F}\|_1 + \|\overline{G}\| + \|\overline{F}\|\big), \\ &\|U\|_\infty + \|\delta U\| \leqslant C\Big(\|\widetilde{F}\|_1 + \|\sqrt{P}\|_\infty\|\delta\overline{U}\| + \sqrt{\|\widetilde{Q}\|_1}\,\|\overline{U}\|_\infty\Big) + \|\overline{U}\|_\infty + \|\delta\overline{U}\|. \end{aligned}$$

3.1 lema (Uždavinio su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis stabilumas). *Jeigu* $P \leqslant p_1$, $\|Q\|_1 \leqslant q_1$, *tuomet teisingas stabilumo įvertis*

$$\|U\|_E := \|U\|_\infty + \|\delta U\| \leqslant \overline{C}(P,Q,R)(\|F\|_1 + \|G\|_\infty). \tag{10}$$

Darbuose [3, 5] pasiūlytas nelokaliųjų uždavinių tyrimo metodas, kuriuo kraštinio uždavinio su nelokaliomis sąlygomis sprendinio ieškoma kaip fundamentaliųjų spren-



1 pav. Fundamentalieji sprendiniai.

dinių tiesinio derinio. Fundamentaliaisiais vadinsime klasikinius sprendinius Φ_0 ir Φ_1 su $g_0 = 1$, $g_1 = 0$ ir $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, atitinkamai (žr. 1 pav. įvairių kraštinių sąlygų atvejais):

$$\begin{cases} L(\Phi_0) = 0, \\ L_0(\Phi_0) = 1, \\ L_1(\Phi_0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L(\Phi_1) = 0, \\ L_0(\Phi_1) = 0, \\ L_1(\Phi_1) = 1. \end{cases} \tag{11}$$

3.2 lema (Fundamentaliųjų sprendinių savybės).

1) Φ_0 *yra nedidėjanti funkcija*, Φ_1 – *nemažėjanti funkcija*;

2) $0 \leqslant \Phi_0,\ 0 \leqslant \Phi_1,\ \Phi_0 + \Phi_1 \leqslant 1,$ *jei yra pirmojo tipo kraštinė sąlyga*,
$0 < \Phi_i \leqslant \Phi_0 + \Phi_1 \leqslant C_K := \overline{C}(P, Q, R),$ *jei nėra pirmojo tipo kraštinių sąlygų*;

3) $\|\Phi_l\|_E \leqslant C_K$.

4. Stabilumo analizė nelokaliam uždaviniui

Stacionariojo (4)–(6) uždavinio su nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis sprendinio ieškokime pavidalu $U = U_K + y_0\Phi_0 + y_1\Phi_1$, čia U_K yra (7)–(8) klasikinio kraštinio uždavinio sprendinys. Tada koeficientai y_0 ir y_1 randami sprendžiant dviejų algebrinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} y_0 = \gamma_0 < K_0, \Phi_0 > y_0 + \gamma_0 < K_0, \Phi_1 > y_1 + \gamma_0 < V_K, \Phi_0 >, \\ y_1 = \gamma_1 < K_1, \Phi_0 > y_0 + \gamma_1 < K_1, \Phi_1 > y_1 + \gamma_1 < V_K, \Phi_1 > . \end{cases} \tag{12}$$

Apibrėžkime matricas

$$\mathbf{K} := \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} \\ k_{10} & k_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < K_0, \Phi_0 > & < K_0, \Phi_1 > \\ < K_1, \Phi_0 > & < K_1, \Phi_1 > \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{\Phi}_h(x_i) := \big(\Phi_0(x_i)\ \Phi_1(x_i)\big).$$

Tada, kaip parodyta [5], (12) sistemos išsprendžiamumą apibrėžia sąlyga

$$\theta := 1 - \gamma_0 k_{00} - \gamma_1 k_{11} + \gamma_0\gamma_1 \det \mathbf{K} \neq 0. \tag{13}$$

Tada srityje $\Omega^\varepsilon := \{(\gamma_0, \gamma_1) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, |\theta| \geqslant \varepsilon, \gamma_l < \varepsilon^{-1}\}$, $\varepsilon > 0$, teisingas stabilumo įvertis

$$\|y_0\Phi_0 + y_1\Phi_1\|_E \leqslant C_K \|(y_0, y_1)\|_\infty$$

$$\leqslant C_K \varepsilon^{-3} \Big(\varepsilon + 2 \max_i \sum_j | < K_i, \Phi_j > | \Big) \sum_l |(< K_l, V >)|. \tag{14}$$

Sakykime, $\sum_{j=1}^{J} |\alpha^j| + \|B\|_1 + \|\overline{B}\| < \infty$. Pasinaudodami (10) nelygybe, įvertiname funkcionalą

$$|(< K, V >)| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{J} |\alpha^j| + \|B\|_1 \right) \|V\|_\infty + \|\overline{B}\| \; \|\delta V\| \leqslant C(\|G\|_\infty + \|F\|_1).$$

4.1 teorema (Uždavinio su nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis stabilumas). *Sakykime,* $(\gamma_0, \gamma_1) \in \Omega_+^\varepsilon$, $\sum_{j=1}^{J} |\alpha^j| + \|B\|_1 + \|\overline{B}\| + \|Q\|_1 < \infty$, $P, R < \infty$, $0 < p_0 \leqslant P$, $q_0 \leqslant Q$. *Tada teisingas uždavinio su nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis stabilumo įvertis*

$$\|U\|_E \leqslant C \left(\|G\| + \|F\|_1 \right).$$

4.1 pastaba. *Analogiškas teiginys teisingas ir diferencialiniui uždaviniui su nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis.*

4.1 išvada. *Tolygaus tinklo atveju teisingas skirtumų schemos konvergavimo įvertis* $\|U - u\|_\infty = \mathcal{O}(h^2)$ *glodiems* u.

Literatūra

[1] R. Čiegis, *Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai*, Technika, Vilnius (2003).

[2] A.A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes*, Marcel Dekker, Inc., New York Basel (2001).

[3] M. Sapagovas, R. Čiegis, On some boundary problems with nonlocal conditions, *Differencialnye Uravnenija*, **23**(7), 1268–1274 (1987) (in Russian).

[4] R. Čiegis, O. Štikonienė, O. Subač, Vieno uždavinio su nelokalia kraštine sąlyga sprendimas, *Liet. matem. rink.*, **41**(spec.nr.), 497–503 (2001).

[5] R. Čiegis, A. Štikonas, O. Štikonienė, O. Subač, Stationary problems with nonlocal boundary conditions, *Mathematical Modelling and Analysis*, **6**(2), 178–191 (2001).

[6] R. Čiegis, A. Štikonas, O. Štikonienė, O. Subač, Monotonnaja raznostnaja shema dlja parabolicheskoj zadachi s nelokalnymi kraevymi uslovijami, *Differencialnye Uravnenija* **38**(7), 968–975 (2002) (in Russian).

Stationary problems with various nonlocal boundary conditions

A. Štikonas, O. Štikonienė, S. Pečiulytė

In this paper we investigate one-dimensional stationary differential problems with various nonlocal boundary conditions and finite difference schemes for them. The boundary conditions of the first, second and third type are considered and nonlocal part of those boundary conditions can be integral type or Samarskii and Bitsadze type. The base idea is to use fundamental solutions of the stationary problems with classical boundary conditions. We find necessary and sufficient solvability conditions for such problems. Stability estimates are proved in the maximum norm. The convergence of the second order finite difference schemes is proved.