

Kvazigardelinių atsitiktinių dydžių sumų skirstinių asimptotiniai skleidiniai

Algimantas Bikelis¹, Kazimieras Padvelskis², Pranas Vaitkus³

¹ Vytauto Didžiojo Universitetas, Informatikos fakultetas

Vileikos 8, LT-44404 Kaunas

² Vilniaus Gedimino Technikos Universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas

Saulėtekio 11, LT-10223 Vilnius

³ Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas

Naugarduko 24, 03225 Vilnius

E. paštas: marius@post.omnitel.net; k.padvelskis@if.vdu.lt; vaitkuspranas@gmail.com

Santrauka. Tikimybinių skirstinių formalūs asimptotiniai skleidiniai yra pateikti P. L. Čebyševio 1890 m. [3] ir F. Edžvorto 1905 m. [5]. Tik 1928 metais G. Krameris paskelbė fundamentałą darbą [4] apie formalių asimptotinių skleidinių pagrįstumą. 1945 metais C.-G. Esseenas [6] parodė, kad gardeliniams atsitiktiniams dydžiams yra kiti asimptotiniai skleidiniai. Daugiamačių tikimybinių skirstinių asimptotinių skleidinių istoriją geriausiai apibendrina R. Bhattacharya ir R. Ranga Rao monografija [2]. Matematinėje statistikoje lygiagrečiai su Edžvorto skleidiniais yra naudojami Kornišo-Fišerio [7] asimptotiniai skleidiniai (transformacijos). Mes savo darbe konstruojame asimptotinius skleidinius atsižvelgdami į normuotos sumos patekimą į Borelio aibę arba tolstantį elipsoidą. Kvazigardeliniams atsitiktiniams vektoriams asimptotiniai skleidiniai yra sudėtingesni kaip C.-G. Esseeno skleidiniai.

Raktiniai žodžiai: Edžvorto skleidiniai, kvazigardeliniai atsitiktiniai dydžiai, Esseeno skleidiniai.

Įvadas

Tarkime $\vec{\xi}$ yra k -matis atsitiktinis vektorius su matematinių vilčių vektoriumi $E\vec{\xi} = \vec{0} \in R^k$ ir neišsigimusia antrųjų momentų matrica Σ . Jo tikimybinį skirstinį žymėsime $F(\vec{x}) = P\{\vec{\xi} < \vec{x}\}$, o charakteringąją funkciją $f(\vec{t}) = Ee^{i(\vec{t}, \vec{\xi})}$. Čia (\vec{t}, \vec{x}) – skaliarinė sandauga Euklido erdvėje R^k .

k -mačių Gauso tikimybinių skirstinių $\Phi(\vec{x}) = P\{\vec{\eta} < \vec{x}\}$ klasę žymėsime $N_k(\vec{0}, \Sigma)$, t. y. $\Phi(\vec{x})$ matematinių vilčių vektorius yra $\vec{0} \in R^k$ ir antrųjų momentų matrica Σ .

Mus domina skirtumo

$$P^{*n}(A\sqrt{n}) - \Phi(A) \tag{1}$$

visoms Borelio aibėms $A \in \mathfrak{M}$ asimptotinis elgesys, kai $n \rightarrow \infty$. Čia

$$P^{*n}(A\sqrt{n}) = \int_A dF^{*n}(\vec{x}\sqrt{n})$$

ir

$$\Phi(A) = \int_A d\Phi(\vec{x}) = \int_A \varphi(\vec{x}) d\vec{x}$$

* pažymi tikimybinių skirstinių sąsūką.

Išskirsime du atvejus: pirmas, kai $F^{*n}(\vec{x}\sqrt{n})$ turi tankio funkciją $p_n(\vec{x})$, antras, kai $\vec{\xi}$ yra kvazigardelinis atsitiktinis vektorius.

Konstruodami formalius asimptotinius skleidinius laikysime, kad $\vec{\xi}$ turi visų eilių baigtinius momentus.

1 Absoliučiai tolydinis atvejis

Pasinaudodami Appel daugianariais mes gauname tokį tankio $p_n(\vec{y})$, $\vec{y} \in R^k$, formalų skleidinį:

$$\begin{aligned}
 p_n(\vec{y}) = & \varphi(\vec{y}) + \frac{1}{6\sqrt{n}} \int_{R^k} \frac{\partial^3}{\partial \varrho^3} \varphi(\vec{y} - \varrho \vec{x}) d(F - \Phi)(\vec{x}) \\
 & + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \sum_{\nu-2\alpha+2m=r} \frac{(-\alpha)^m}{\alpha! \nu! m!} \\
 & \times \int_{R^k} \frac{\partial^{m+\nu}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^\nu} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)^k \varphi\left(\frac{\vec{y} - \varrho \vec{x}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \right]_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}} d(F - \Phi)^{* \alpha}(\vec{x}) \\
 & + \sum_{r=4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \sum_{\nu-2\alpha+3m+2j=r} q_{jl} \frac{(-1)^{j+m} \alpha^m}{\nu! m! (\alpha - j - l - 1)!} \\
 & \times \int_{R^k} \frac{\partial^{m+\nu}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^\nu} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)^k \varphi\left(\frac{\vec{y} - \varrho \vec{x}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \right]_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}} d(F - \Phi)^{* \alpha}(\vec{x}). \tag{2}
 \end{aligned}$$

Čia

$$\varphi(\vec{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^k \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \vec{y}^T \Sigma^{-1} \vec{y}\right\},$$

$|\Sigma|$ yra matricos Σ determinantas,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu-2\alpha+2m=r} &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{\nu=3\alpha \\ \nu-2\alpha+2m=r}}^{\infty}, \\
 \sum_{\nu-2\alpha+3m+2j=r} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{\alpha=j+l+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{\nu=3\alpha \\ \nu-2\alpha+3m+2j=r}}^{\infty}, \\
 q_{jl-1} &= \Sigma^* \frac{1}{\nu_1! \dots \nu_j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{1}{j+1}\right)^{\nu_j},
 \end{aligned}$$

$l = 1, 2, \dots, j$, Σ^* pažymi sunumeravimą pagal neneigiamus sveikus skaičius $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_j$ tenkinančius lygybes

$$\begin{aligned}
 \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + j\nu_j &= j, \\
 \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_j &= k.
 \end{aligned}$$

Iš lygybės (2) visoms $A \in \mathfrak{M}$ išplaukia skirtumo (1) formalus skleidinys:

$$\begin{aligned}
 P^{*n}(A\sqrt{n}) - \Phi(A) &= \frac{1}{6\sqrt{n}} \int_{R^k} \left[\frac{\partial^3}{\partial \varrho^3} P\{\bar{\eta} + \varrho \bar{x} \in A\} \right]_{\varrho=0} d(F - \Phi)(\bar{x}) \\
 &+ \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^r \sum_{\nu-2\alpha+2m=r} \frac{(-\alpha)^m}{\alpha! \nu! m!} \\
 &\times \int_{R^k} \left[\frac{\partial^{m+\nu}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^\nu} P\{\sqrt{1+\varepsilon} \bar{\eta} + \varrho \bar{x} \in A\} \right]_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}} d(F - \Phi)^{* \alpha}(\bar{x}) \\
 &+ \sum_{r=4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^r \sum_{\nu-2\alpha+2m+2j=r} q_{jl} \frac{(-1)^{j+m} \alpha^m}{\nu! m! (\alpha - j - l - 1)!} \\
 &\times \int_{R^k} \left[\frac{\partial^{m+\nu}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^\nu} P\{\sqrt{1+\varepsilon} \bar{\eta} + \varrho \bar{x} \in A\} \right]_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}} d(F - \Phi)^{* \alpha}(\bar{x}).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Iš šios lygybės tinkamai parinkus aibę $A \subset R^k$ mes galime gauti eilę asimptotinių skleidinių. Pavyzdžiui, kai

$$A = \{\bar{y}: (\bar{y} - \bar{a})^T \Sigma^{-1} (\bar{y} - \bar{a}) < x\},$$

$\bar{a} \in R^k, x \geq 0$, tai

$$\int_A \varphi(\bar{y} - \varrho \bar{x}) d\bar{y} = P\{\chi_k^2(\delta) < x\}.$$

Čia $\chi_k^2(\delta)$ yra necentrisis χ_k^2 atsitiktinis dydis su necentriškumo parametru

$$\delta = (\bar{a} - \varrho \bar{x})^T \Sigma^{-1} (\bar{a} - \varrho \bar{x}),$$

t. y.

$$P\{\chi_k^2(\delta) < x\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\delta}{2} \right)^j e^{-\frac{\delta}{2}} P\{\chi_k^2(0) < x\}.$$

Čia $\chi_k^2(0)$ – centrinis χ_k^2 atsitiktinis dydis su k laisvės laipsnių.

Iš (3) seka, kad

$$\begin{aligned}
 &\int_{(\bar{y}-\bar{a})^T \Sigma^{-1} (\bar{y}-\bar{a}) < x} p_n(\bar{y}) d\bar{y} - P\{\chi_k^2(\bar{a}^T \Sigma^{-1} \bar{a}) < x\} \\
 &= \frac{1}{6\sqrt{n}} \int_{R^k} \left[\frac{\partial^3}{\partial \varrho^3} P\{\chi_k^2((\bar{a} - \varrho \bar{x})^T \Sigma^{-1} (\bar{a} - \varrho \bar{x})) < x\} \right]_{\varrho=0} d(F - \Phi)(\bar{x}) \\
 &+ \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^r \sum_{\nu-2\alpha+2m=r} \frac{(-\alpha)^m}{\alpha! \nu! m!} \int_{R^k} \left[\frac{\partial^{m+\nu}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^\nu} P\left\{ \chi_k^2 \left(\left(\frac{\bar{a} - \varrho \bar{x}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \right)^T \right. \right. \right. \\
 &\left. \left. \left. \times \Sigma^{-1} \left(\frac{\bar{a} - \varrho \bar{x}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \right) \right) < x(1+\varepsilon) \right\} \right]_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}} d(F - \Phi)^{* \alpha}(\bar{x})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \sum_{\nu=2\alpha+2m+2j=r} q_{jl} \frac{(-1)^{j+m} \alpha^m}{\nu! m! (\alpha-j-l-1)!} \int_{R^k} \left[\frac{\partial^{m+\nu}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^\nu} \right. \\
 & \left. \times P \left\{ \chi_k^2 \left(\left(\frac{\vec{a} - \varrho \vec{x}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \right)^T \Sigma^{-1} \left(\frac{\vec{a} - \varrho \vec{x}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \right) \right) < x(1+\varepsilon) \right\} \right]_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}} d(F - \Phi)^{* \alpha}(\vec{x}),
 \end{aligned}$$

visiems $\vec{a} \in R^k$ ir $x \geq 0$).

2 Kvazigardelinių tikimybinių skirstinių atvejis

Nagrinėjame nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių kvazigardelinių atsitiktinių vektorių seką $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \dots, \vec{\eta}_n$, t. y. $\vec{\eta}_1$ įgyja reikšmes $\vec{\beta} \vec{\nu} = (\beta_1 \nu_1, \beta_2 \nu_2, \dots, \beta_k \nu_k)$, $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_k)$, $\nu_i = 0, \pm 1, \dots$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)$, $\beta_i \geq 0$ ir β_1, \dots, β_k yra tiesiškai nesusiršti racionalių skaičių kūne. Charakteringoji funkcija $\vec{\eta}_1$ yra

$$f(\vec{t}) = \sum_{\nu_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\nu_k=-\infty}^{\infty} e^{i(\vec{t}, \vec{\beta} \vec{\nu})} P\{\vec{\eta}_1 = \vec{\beta} \vec{\nu}\}.$$

Pažymėkime $\vec{Z}_n = \vec{\eta}_1 + \dots + \vec{\eta}_n$. Tuomet

$$P\{\vec{Z}_n = \vec{\beta} \vec{\nu}\} = \frac{\beta_1 \dots \beta_k}{(2\pi)^k} \int_{-\pi/\beta_1}^{\pi/\beta_1} \dots \int_{-\pi/\beta_k}^{\pi/\beta_k} e^{-i(\vec{t}, \vec{\beta} \vec{\nu})} f^n(\vec{t}) d\vec{t}.$$

Atliekame kintamųjų pakeitimą $\vec{t} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{n}}$ ir gauname

$$\frac{(\sqrt{n})^k}{\beta_1 \dots \beta_k} P\{\vec{Z}_n = \vec{\beta} \vec{\nu}\} = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{I_n} e^{-i(\vec{u}, \frac{\vec{\beta} \vec{\nu}}{\sqrt{n}})} f^n\left(\frac{\vec{u}}{\sqrt{n}}\right) d\vec{u}. \tag{3}$$

Čia $I_n = \{\vec{t}: |t_j| \leq \frac{\sqrt{n}\pi}{\beta_j}, j = 1, \dots, k\}$.

Kadangi

$$f^n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right) = Q\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right),$$

čia

$$\begin{aligned}
 Q\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right) & = e^{-\frac{1}{2} \vec{t}^T \Sigma \vec{t}} \left\{ 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu=3\alpha}^{\infty} \frac{(-\alpha)^m}{\alpha! \nu! m!} \right. \\
 & \times \int_{R^k} \left(-\frac{1}{2} \vec{t}^T \Sigma \vec{t}\right)^m (i(\vec{t}, \vec{x}))^\nu d(F - \Phi)^{* \alpha}(\vec{x}) \\
 & + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{\alpha=j+l+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu=3\alpha}^{\infty} q_{jl} \frac{(-1)^{j+m} \alpha^m}{\nu! m! (\alpha-j-l-1)!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu-2\alpha+2m+2j} \\
 & \left. \times \int_{R^k} \left(-\frac{1}{2} \vec{t}^T \Sigma \vec{t}\right)^m (i(\vec{t}, \vec{x}))^\nu d(F - \Phi)^{* \alpha}(\vec{x}) \right\},
 \end{aligned}$$

tai iš (4) lygybės seka, kad

$$\frac{(\sqrt{n})^k}{\beta_1 \dots \beta_k} P\{\vec{Z}_n = \vec{\beta}\vec{v}\} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k \int_{R^k} e^{-i(\vec{t}, \frac{\vec{\beta}\vec{v}}{\sqrt{n}})} Q\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right) d\vec{t} + R(\vec{\beta}\vec{v}).$$

Čia

$$R(\vec{\beta}\vec{v}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k \int_{R^k \setminus I_n} e^{-i(\vec{t}, \frac{\vec{\beta}\vec{v}}{\sqrt{n}})} Q\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right) d\vec{t}.$$

Gauname, kad

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{n})^k}{\beta_1 \dots \beta_k} P\{\vec{Z}_n \\ & = \vec{\beta}\vec{v}\} = \varphi\left(\frac{\vec{\beta}\vec{v}}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{6\sqrt{n}} \int_{R^k} \left[\frac{\partial^3}{\partial \varrho^3} \varphi\left(\frac{\vec{\beta}\vec{v}}{\sqrt{n}} - \varrho\vec{x}\right)\right]_{\varrho=0} d(F - \Phi)(\vec{x}) \\ & + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \sum_{\nu-2\alpha+2m=r} \frac{(-\alpha)^m}{\alpha! \nu! m!} \\ & \times \int_{R^k} \frac{\partial^{m+\nu}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^\nu} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)^k \varphi\left(\frac{\vec{\beta}\vec{v}}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}} - \frac{\varrho}{\sqrt{1+\varepsilon}}\vec{x}\right)\right]_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}} d(F - \Phi)^{* \alpha}(\vec{x}) \\ & + \sum_{r=4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \sum_{\nu-2\alpha+2m+2j=r} q_{jl} \frac{(-1)^{j+m} \alpha^m}{\nu! m! (\alpha - j - l - 1)!} \\ & \times \int_{R^k} \frac{\partial^{m+\nu}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^\nu} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)^k \varphi\left(\frac{\vec{\beta}\vec{v}}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}} - \frac{\varrho}{\sqrt{1+\varepsilon}}\vec{x}\right)\right]_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}} d(F - \Phi)^{* \alpha}(\vec{x}) + R. \end{aligned} \tag{4}$$

Iš šios formalios lygybės seka asimptotinė formulė nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių kvazigardelinių atsiktinių dydžių $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sumos $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ tikimybei

$$P\{S_n = (\vec{\beta}, \vec{v})\}.$$

Čia ξ_1 įgyja reikšmes $(\vec{\beta}, \vec{v}) = \beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2 + \dots + \beta_k \nu_k$. Pasinaudojame lygybe

$$P\{S_n = (\vec{\beta}, \vec{v})\} = P\{\vec{Z}_n = \vec{\beta}\vec{v}\}.$$

Ši lygybė seka iš $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ tiesiško nesurištumo racionalių skaičių kūne, t. y.

$$\beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2 + \dots + \beta_k \nu_k = 0$$

tada ir tik tada, kai $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_k = 0$.

Iš (5) lygybės, panaudojus Eulerio-Makloreno sumavimo formulę, gauname tikimybes

$$P\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in A\right\}$$

asimptotinį sklaidinį.

Gautų formalų asimptotinių skleidinių pagrindumas gaunamas klasikiniais metodais (žiūr. [1]). Formulėje (3) imame narius iki $r = s$.

Literatūra

- [1] O.E. Barndorff-Nielsen and D.R. Cox. *Asyptotic Techniques for Use in Statistics*. Chapman and Hall, 1989.
- [2] R.N. Bhattacharya and R. Ranga Rao. *Normal Approximation and Asymptotic Expansions*. SIAM, 2010.
- [3] P.L. Chebyshev. Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités. *Acta Math.*, **14**:305–315, 1890.
- [4] H. Cramér. On the composition of elementary errors. *Skand. Aktuarietidskr.*, **11**:13–74, 1928.
- [5] F.Y. Edgeworth. The law of error. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **20**:336–65, 1905.
- [6] C.-G. Esesen. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. *Acta Math.*, **77**:1–125, 1945.
- [7] E.D. Melune and H.L. Gray. Cornish–fisher and edeworth expansions. *Encyclopedia of Statist. Scien.*, **II**:188–193, 1983.

SUMMARY

Asymptotic expansions for distribution of sums quasi-lattice random variables

A. Bikelis, K. Padvelskis, P. Vaitkus

Although Chebyshev [3] and Edeworth [5] had conceived of the formal expansions for distribution of sums of independent random variables, but only in Cramer's work [4] was laid a proper foundation of this problem. In the case when random variables are lattice Esseen get the asymptotic expansion in a new different form. Here we extend this problem for quasi-lattice random variables.

Keywords: Edgeworth expansions, quasi-lattice distributions, Esseen expansions.