

Aštuntokų matematikos pasiekimai: kokybiniai ir kiekybiniai aspektai

Viktorija Sičiūnienė¹, Janina Dargytė²

¹*Lietuvos edukologijos universitetas, Gamtos, matematikos ir technologijų fakultetas*
Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius

²*Nacionalinis egzaminų centras*

M. Katkaus g. 44, LT-09217 Vilnius

E. paštas: viktorija.siciuniene@leu.lt, janina.dargyte@nec.lt

Santrauka. Straipsnyje pristatomi susisteminti ir suklasifikuoti aštuntokų pasiekimai iš algebros ir funkcijų srities. Nagrinėta, kokius gebėjimus pademonstravo patenkinamo, pagrindinio ir aukštesniojo pasiekimų lygių mokiniai, sprenddami reiškinių, lygčių, nelygybių, situacijų modeliavimo, proporcingumo temų uždavinius. Autorių siūlymai, kaip tobulinti matematikos ugdymo turinį, yra paremti kokybine uždavinių analize bei mokinių darbų statistine analize. Nagrinėti 134 uždaviniai, kuriuos sprendė 8904 šalies mokiniai. Autorės dėkoja Nacionaliniam egzaminų centrui už suteiktą galimybę naudotis mokinių duomenų bazėmis.

Raktiniai žodžiai: algebros sritis, funkcijų sritis, modernioji testų teorija, konstrukciniai gebėjimai, pasiekimų lygiai, reprodukciniai gebėjimai, standartizuota programa.

2013 m. pavasarį matematikų bendruomenės narius pasiekė prof. R. Norvaišos inicijuotas ir grupės matematikų parengtas dokumento „Matematinio ugdymo bendrojo ugdymo mokykloje gairės“ projektas, kuriame įvertinta matematinio ugdymo Lietuvos mokyklose dabartinė padėtis ir siūlomas bendras veiklos planas siekiant šią padėtį pagerinti [2]. Tolimesnė trokštamų rezultatų projektavimo, būdų jiems pasiekti numatymo sėkmė priklauso nuo to, kiek giliai ir sistemiškai bus įsigilinta į esamą ugdymo situaciją.

Pasaulinėje praktikoje sprendimai dėl matematikos ugdymo kaitos grindžiami mokinių pasiekimų tyrimų rezultatais. Straipsnio autorės turi nemenką įdirbį šioje srityje: keletą metų jos tyrinėjo mokinių matematikos pasiekimus, stebėjo jų kitimo tendencijas, aktyviai dalyvavo parengiant nacionalinio lygmens mokinių pasiekimų tyrimo ataskaitas [1], yra parašiusios mokslinių straipsnių mokinių matematikos pasiekimų temomis [5, 4, 7], prisidėjo plėtojant projektą „Standartizuotų mokinių pasiekimų vertinimo ir įsivertinimo įrankių bendrojo lavinimo mokykloms kūrimas, 1-asis etapas“ (toliau – Projektas), kurio metu buvo išbandyta ir įsisavinta Lietuvoje anksčiau netaikyta, moderni mokinių pasiekimų vertinimo programų rengimo metodika, sukurtos matematikos standartizuotos programos 4 ir 8 klasės mokiniams, sukaupta pakankamai didelė ir patikima duomenų bazė (564 matematikos užduotys 8-ai klasei; iš viso jas sprendė 8904 mokiniai) [8].

Straipsnio autorės numatė atlikti papildomą darbą, padėsiantį atskleisti stipriąsias ir silpnąsias matematinio ugdymo vietas, numatyti konkrečius ugdymo turinio tobu-

1 lentelė. Patenkinamo ir pagrindinio pasiekimų lygio mokinių sprendžiamų uždavinių pavyzdžiai.

	Patentkinamas lygis	Pagrindinis lygis
Apskaičiuoti reiškinio reikšmę	$4a + 5$, kai $a = 2$	$0,2 + a$, kai $a = \frac{2}{5}$
Sutraukti panašiuosius narius	$-10m + 3m$	$4k + 10k - 20k$
Iškelti bendrąjį dauginamąjį	$ab - ac$	$3x + 18$

linimo žingsnius. Įgyvendindamos savo sumanymą, jos išanalizavo Bendrąją pagrindinio ugdymo matematikos programą (2008), išrinko visas joje minimas matematinės sąvokas, sudarė jų schemas ir modelius (pagal [3]; [6, pp. 51–61]). Įsigilinosios į sąvokoms suteikiamą turinį, įvertinusios sąvokų hierarchinius bei integracinius ryšius, jos išskyrė 28 mokinių matematinės veiklos sritis, apie kurias turima pakankamai informacijos Projekto duomenų bazėje. Tuomet buvo analizuojama, kurį kognityvinių gebėjimų lygį¹ kiekvienoje išskirtoje matematinės veiklos srityje pavyko pasiekti įvairių pasiekimų lygių² aštuntokams.

Pirmieji šios analizės rezultatai, gauti nagrinėjant aštuonias veiklos sritis, tradiciškai priskiriamas geometrijos ir matavimų kursui, straipsnio autorių buvo paskelbti anksčiau [5].

Šio darbo *tikslas* – aprašyti ir įvertinti progimnaziją bebaigiančių mokinių pasiekimus iš dar penkių veiklos sričių, tradiciškai priskiriamų mokykliniam algebros ir funkcijų kursui: reiškiniai, lygtys, nelygybės, situacijų modeliavimas, proporcingumas.

Ši analizė buvo atliekama remiantis 134 uždavinių sprendimo rezultatais. Išvados apie mokinių *žinios ir supratimas* grupės gebėjimus buvo daromos iš 52 (39 proc.) uždavinių, apie *taikymai standartinėse situacijose* grupės gebėjimus – iš 60 (45 proc.) uždavinių. Likusieji uždaviniai teikė informaciją apie mokinių gebėjimus taikyti žinias nestandartinėse situacijose. Analizuojant duomenis buvo pasinaudota ir papildoma informacija apie mokinių sprendimus (ji renkama koduojant mokinių darbus). Toliau pateikiami ir aptariami atliktos analizės rezultatai.

Žinios ir supratimas. Paaikškėjo, kad skirtingų pasiekimų lygių mokinių žinios apie reiškinių tapačiuosius pertvarkius ženkliai skiriasi. Nors patenkinamo pasiekimų lygio mokiniai ir sprendžia uždavinius, kuriuose prašoma apskaičiuoti reiškinio skaitinę reikšmę, sutraukti panašiuosius narius, iškelti bendrą daugiklį prieš skliaustus, tačiau jų darbo sėkmė priklauso nuo įvairių papildomų sąlygų, tokių kaip: reikia atlikti tik vieną kurią paminėtą procedūrą, visi skaičiavimai atliekami su nedideliais sveikaisiais skaičiais, sutraukiami tokie panašieji nariai, kurių koeficientai nėra lygūs 1 ar -1 , prieš skliaustus reikia iškelti tik aiškiai išskirtą daugiklį (žr. 1 lentelę). Akivaizdu, kad šiame amžiaus tarpsnyje mokiniams tobulėti trukdė prasti jų skaičiavimo įgūdžiai. Be to, atskliautimo, reiškinių dauginimo, kėlimo antruoju laipsniu, sandaugos skaidymo daugikliais procedūrų, t. y. visų tų, kurios glaudžiai susijusios su daugybos perstatomumo dėsnio taikymu, jie nėra įsisavinę, o tai byloja apie nepakankamai tam skirtą dėmesį žemesnėse klasėse (žr. 3 lentelę).

¹ Skiriami trys kognityvinių gebėjimų lygiai: pirmieji du – *žinios ir supratimas* ir *taikymai standartinėse situacijose* – apibūdina mokinių reprodukcinio mąstymo gebėjimus, trečiasis – *taikymai nestandartinėse situacijose* – apibūdina mokinių konstrukcinius mąstymo gebėjimus (plačiau [5, p. 233]).

² Skiriami trys mokinių pasiekimų lygiai: patenkinamas, pagrindinis, aukštesnysis. Pasiekimo lygio nustatymo procedūra straipsnio autorių aprašyta (žiūr. [5, p. 232]).

Pagrindinio pasiekimų lygio mokinių žinios akivaizdžiai geresnės. Jie atlieka visus Bendrojoje matematikos programoje paminėtus reiškinių tapačiuosius pertvarkius, geba derinti kelias tapačiųjų pertvarkių procedūras. Vis tik vertas dėmesio faktas, kad, pertvarkydami $(a \pm b)$ ir $(a - b)(a + b)$ pavidalo reiškinius, jie remiasi ne greitosios daugybos formulėmis, o laipsnio apibrėžimu ir reiškinių daugybos taisykle. Tuo tarpu greitosios daugybos formules taiko (ir į abi puses) tik aukštesniojo pasiekimų lygio mokiniai.

Ne tik su reiškiniais ir jų pertvarkiais susijusias sąvokas patenkinamo pasiekimų lygio mokiniai yra nepakankamai įsisavinę. Lygčių ir nelygybių temas jie taip pat menkai supranta. Pavyzdžiui, jie teisingai išsprendė lygtį $x : 15 = 3$, tačiau lygties $y : 0,8 = -9$ sprendinio nesugebėjo apskaičiuoti. Matomai, jie nežinojo šios vieno žingsnio lygties sprendimo algoritmo, o ieškodami lygties sprendinio bandė jį spėti (taikė žemesnėse klasėse įvaldytą strategiją).

Uždavinių su nelygybės, nelygybės sprendinio, skaičių intervalo sąvokomis patenkinamo pasiekimų lygio mokiniai arba visai nesprendė, arba demonstravo akivaizdų šių sąvokų nesuvokimą.

Pagrindinio pasiekimų lygio mokiniai gebėjo spręsti įvairaus sudėtingumo pirmojo laipsnio lygtis, tačiau su sąlyga, kad jos turi vieną sprendinį. Lygtis, kurios neturi sprendinių arba jų turi be galo daug, teisingai sprendė tik aukštesniojo pasiekimų lygio aštuntokai. Ši mokymo spraga, matomai, trukdo pagrindinio pasiekimų lygio mokiniams suprasti ir kaip yra sprendžiamos $(x - a)(x - b) = 0$ pavidalo lygtys. Spręsdami tokias lygtis, aštuntokai turėtų kiekvieną sandaugos dauginamąjį prilyginti nuliui, tačiau jie atskliausdavo lygties kairiąją pusę ir sustodavo (kaip spręsti kvadratinę lygtis, suvedant jas į standartinę pavidalą, mokoma aukštesnėse klasėse).

Pirmojo laipsnio nelygybių sprendimo algoritmas panašus į lygčių, gal todėl pagrindinio pasiekimų lygio mokiniai šias nelygybes sprendė. Tačiau, jei paskutiniame nelygybės sprendimo žingsnyje abi nelygybės puses teko padalyti iš neigiamojo skaičiaus, tai tokias teisingai pabaigdavo spręsti tik aukštesniojo pasiekimų lygio aštuntokai. Šis faktas byloja apie tai, kad nelygybės sąvoką gerai ir giliai supranta tik aukštesniojo pasiekimų lygio mokiniai.

Taikymai standartinėse situacijose. Kitas kognityvinių gebėjimų laiptelis – gebėjimas taikyti turimas žinias sprendžiant žodinius uždavinius. Situacijų modeliavimas reiškiniais, lygtimis, nelygybėmis, formulėmis tampriai susijęs su uždavinio kontekstu bei su mokinio žinojimu, kokie uždavinio sąlygoje esantys žodžiai/terminai kreipia teisingo veiksmo ar procedūros link.

Patenkinamo pasiekimų lygio mokiniai sprendė tik gerai pažįstamus, tikroviškus, artimus jų kasdieniui patirčiai uždavinius, kuriuose kalba eina apie ko nors pirkimą ar judėjimą ir kuriuos išspręsti galima atliekant du-tris aritmetinius veiksmus. Iš uždavinio sąlygos jiems pavykdavo sudaryti paprastą skaitinį ar raidinį reiškinį, išrinkti uždavinio sąlygą atitinkantį/neatitinkantį sudėtingesnį reiškinį, užrašytame viename iš keturių pasirinkamųjų atsakymų. Šio pasiekimų lygio mokiniai noriai sprendė ir tokius uždavinius, kurių sąlygoje buvo nurodyta jiems nežinoma formulė. Jie sugebėdavo įrašyti į formulę kintamųjų skaitines reikšmes, tačiau tolimesnė jų darbo sėkmė priklausė nuo turimų procedūrinių žinių ir įgūdžių. Prastos patenkinamo pasiekimų lygio mokinių žinios iš lygčių ir nelygybių temų lėmė, kad nė vieno šių žinių taikymo uždavinio jie net nebando spręsti.

Pagrindinio pasiekimų lygio mokinių gebėjimai modeliuoti lygtimis situacijas žymiai geresni, tačiau sėkmė juos lydėjo tik tuomet, kai nežinomas uždavinio sąlygoje

2 lentelė. Aukštesniojo pasiekimų lygio mokinių sprendžiamų uždavinių pavyzdžiai.

Dviratininkas per 5 h ketina vienodu greičiu nuvažiuoti 60 km. Kiek kilometrų jam liktų nuvažiuoti po x valandų kelio?
 Užrašyk lygtimi teiginį: reiškinio $m + 8$ reikšmė 2 vienetais mažesnė už reiškinio $4m - 8$ reikšmę.

3 lentelė. Kokias sąvokas/teiginius vartoja/taiko/yra įsisavinę įvairių pasiekimų lygių aštuntokai.

Veiklos sritis	Patenkinamas lygis	Pagrindinis lygis	Aukštesnysis lygis
Reiškiniai, jų pertvarkiai	Kintamojo/reiškinio reikšmė, panašijų narių sutraukimas, bendro dauginamojo iškelimas prieš skliaustus/už skliaustų	Reiškinio suprastinimas, atskliautimas, skaidymas dauginamaisiais	Greitosios daugybos formulės (kvadratų skirtumo, sumos skirtumo kvadrato)
Lygtys, jų sprendimas	Lygties sprendinys, išspręsti lygtį	Pirmo laipsnio su vienu nežinomuoju lygtis, kuri turi vieną sprendinį	Pirmo laipsnio su vienu nežinomuoju lygtis, kuri neturi sprendinių arba turi jų labai daug; lygtis $(x - a)(x - b) = 0$
Nelygybės, jų sprendimas			Pirmojo laipsnio nelygybė, skaičių intervalas
Situacijų modeliavimas	Aritmetinis sprendimo būdas, spėjimas	Iš uždavinio sąlygos sudaroma lygtis, kai nežinomas sąlygoje nurodytas	Situacijų modeliavimas įvairiomis lygtimis
Formulės, proporcijos, proporcingumas	Kintamasis, formulė, lentelė	Proporcija, jos savybė, santykis, tiesiogiai ir atvirkščiai proporcingi dydžiai	Mastelis

buvo nurodytas arba akivaizdus. Jie gerai sprendė tokius uždavinius, kuriuose buvo prašoma nustatyti, su kuria kintamojo reikšme reiškinys ar dydis įgyja duotą skaitinę reikšmę, kada du reiškiniai yra lygūs, tačiau jie neretai klydo spęsdami uždavinius, kurių sąlygoje buvo nurodyta, kiek vienetų/kartų vieno reiškinio/dydžio reikšmė didesnė/mažesnė nei kito. Pagrindinė jų daroma klaida – ne toje lygties pusėje prirašomos sąlygoje nurodytų reiškinų/dydžių skirtybės.

Aukštesniojo pasiekimų lygio mokiniams šios problemos nebuvo aktualios, jų modeliavimo standartinėse situacijose gebėjimai geri (žr. 2 lentelę, 3 lentelę).

Taikymai nestandartinėse situacijose. Buvo analizuojama, kaip mokiniai geba spręsti trijų grupių uždavinius:

- tikroviško konteksto, kuriuos sprendžiant tenka taikyti žinias apie proporcingumą, santykį, mastelį;
- kuriuos galima išspręsti sudarius reiškinį/lygtį arba aritmetiniu būdu (iš sąlygos nežinomasis nėra akivaizdus);
- kuriuos sprendžiant reikia taikyti suskaidymo į kelis paprastesnius uždavinius strategiją arba/ir derinti kelių sričių/temų žinias.

Patenkinamo pasiekimų lygio mokiniai šių uždavinių neįveikė.

Pagrindinio pasiekimų lygio mokiniai gerai sprendė neįprasto konteksto uždavinius su proporcingumu, santykio sąvokomis. Uždavinius, kuriuose buvo minima mastelio sąvoka, sprendė tik aukštesniojo pasiekimų lygio mokiniai.

Akivaizdūs skirtumai tarp pagrindinio ir aukštesniojo pasiekimų lygių mokinių išryškėjo sprendžiant antrosios ir trečiosios grupės uždavinius. Pagrindinio lygio mokiniai, skirtingai nei aukštesniojo, sprendami juos:

- dažniau rinkosi ne algebrinį, o aritmetinį sprendimo būdą;
- neišsamiai atsakinėjo į uždavinių klausimus (pvz., kai atsakyme reikėjo nurodyti dvi apskaičiuotas reikšmes, jie užrašydavo vieną);
- gebėjo suskaidyti uždavinį į dalis, tačiau jas sprendami ne visuomet sėkmingai derino įvairių temų žinias.

Išvados

1. Patenkinamo pasiekimų lygio aštuntokai nesupranta daugumos algebros ir funkcijų srities sąvokų ir procedūrų, minimų Bendrojoje matematikos programoje (2008). Pagrindinis trukdys – prasti skaičiavimo įgūdžiai (nesugebėjimas atlikti veiksmus su trupmenomis, nesuvokimas perstatomumo dėsnio). Taikymo uždavinius patenkinamo pasiekimų lygio mokiniai sprendžia išimtinai aritmetiniu arba spėjimo būdu (žemesnėse klasėse naudotos strategijos).
2. Pagrindinio pasiekimų lygio mokinių algebros ir funkcijų srities gebėjimai išlaivinti tinkamai. Rekomenduojama daugiau dėmesio skirti šių mokinių analitiniam gebėjimams lavinti.
3. Aukštesniojo pasiekimų lygio aštuntokai puikiai įsisavinę Bendrojoje programoje numatytą turinį. Tikslinga būtų pasiūlyti papildomą.

Literatūra

- [1] *Nacionalinių mokinių pasiekimų (2003–2008) tyrimų ataskaitos. Interaktyvios*. Atdesas internete: <http://www.upc.smm.lt/ekspertavimas/tyrimai/>.
- [2] R. Norvaiša. Matematinio ugdymo bendrojo ugdymo mokykloje gairės. (Projektas). Atdesas internete: <http://www.upc.smm.lt/naujienos/matematika/gaires/>. Matematinio ugdymo gairių projektas.pdf (žiūrėta 2013 04 22).
- [3] *Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosios programos*. Vilnius, 2008, pp. 789–858.
- [4] V. Sičiūnienė ir J. Dargytė. Silpnai besimokančiųjų bendrojo lavinimo mokyklos mokinių matematinių gebėjimų diagnostika. *Mokytojų ugdymas: tarptautinis recenzuojamas mokslo leidinys*, **16**(1):64–76, 2011.
- [5] V. Sičiūnienė ir J. Dargytė. Geometrijos mokymasis progimnazijoje: rezultatai ir iššūkiai. *Liet. mat. rink.: LMD darbai, ser. B*, **53**:231–236, 2012.
- [6] V. Sičiūnienė. *Matematikos didaktika*, 1 knyga: metodinė priemonė. Vilnius, 2010.
- [7] V. Sičiūnienė and J. Dargytė. Teaching mathematics to gifted learners in Lithuanian basic school: the analysis of the situation and prospects. In *Proceedings of 11th International Conference: Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives*, May 6–7, 2010, Daugavpils, Latvia, pp. 83–90, 2010.
- [8] *Standartizavimo procedūrų aprašas. II dalis. 8 klasės. Lietuvių gimtosios kalbos, matematikos ir istorijos standartizuotos programos ir testų pavyzdžiai*. Vilnius, 2012.

SUMMARY

Eighth grade mathematical achievements: qualitative and quantitative aspects

V. Sičiūnienė, J. Dargytė

This paper presents systematic and classified achievements of eighth grade students' in the field of algebra and functions. The authors analyze different student skills of satisfactory, basic and advanced achievement levels in particular themes: expressions, equations, inequalities, simulation and proportionality. Author's suggestions on how to improve the curriculum are based on the qualitative analysis of the tasks and the statistical analysis of students' work. Data collect from 8904 country's students test books and analyze 134 tasks. The authors would like to thank the National Examination Centre for access to the student database.

Keywords: algebra, functions, modern test theory, constructive abilities, achievement levels, reproductive abilities, standardized program.