

Trikampio kampų kotangentų racionaliosios reikšmės

Edmundas Mazėtis^{1,2}, Grigorijus Melničenko¹

¹*Lietuvos edukologijos universitetas, Gamtos, matematikos ir technologijų fakultetas*
Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius

²*Vilniaus Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: edmundas.mazetis@leu.lt, gmelnichenko@gmail.com

Santrauka. Straipsnyje nagrinėjamos trikampių, kurių kampų kotangentai yra racionalieji skaičiai, savybės. Svarbiausias darbo rezultatas yra įrodytas faktas, kad bet kuris trikampis, kurio dviejų kampų kotangentai yra racionalieji skaičiai, panašus į trikampį, kurio kraštinių ilgiai yra racionalieji skaičiai, o dviguba ploto reikšmė – sveikasis skaičius.

Raktiniai žodžiai: Herono trikampis, pseudo Herono trikampis, sveikaskaitė gardelė.

Įvadas

Indų matematikas Brachmagupta (598–668) nagrinėjo trikampius, kurių kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai, o plotas irgi sveikasis skaičius. Tokie trikampiai vėliau buvo pavadinti Herono trikampaiais. Pastaruoju metu apie Herono trikampius paskelbta daug darbų. Pvz., taikant gilius elipsinių kreivių teorijos rezultatus, įrodyta, kad egzistuoja be galo daug Herono trikampių, kurių plotas yra duotasis skaičius [2]. Įrodytas kitas svarbus faktas, kad bet kurio Herono trikampio viršūnės galima patalpinti sveikaskaitės gardelės mazguose [4, 7].

Jei trikampio viršūnės yra sveikaskaitės gardelės mazgai, tai jo kraštinių ilgių kvadratai ir dviguba ploto reikšmė yra sveikieji skaičiai (3 teorema). Be to, tokių trikampių yra be galo daug. Todėl natūralu tokius trikampius vadinti pseudo Herono trikampaiais. Trikampis, kurio viršūnės yra sveikaskaitės gardelės mazgai, panašus trikampiui, kurio dviejų kampų tangentai yra racionalieji skaičiai, arba vieno jų tangentas yra racionalusis skaičius, o kito lygus begalybei [1]. Todėl natūralu išnagrinėti ekvivalentų atvejį, kai trikampio dviejų kampų kotangentai yra racionalieji skaičiai.

Autorių nuomone, tokie tyrinėjimai gali būti gera medžiaga įvairiems projektiniams darbams su matematikai gabiais mokiniais. Mūsų tyrinėjimai remiasi elementariosios geometrijos faktais, bet atvirų problemų pavyzdžiai parodo, kad elementariai formuluojamos geometrijos problemos gali būti sprendžiamos sudėtingų teorijų pagalba.

1 Pseudo Herono trikampiai

Priminsime Herono trikampio apibrėžimą.

1 apibrėžimas. Trikampis, kurio kraštinių ilgių ir plotas yra sveikieji skaičiai, vadinamas Herono trikampiu.

Apibrėšime pseudo Herono trikampių sąvoką, kurios atskiras atvejis yra Herono trikampiai.

2 apibrėžimas. Trikampis, kurio kraštinių ilgių kvadratai yra sveikieji skaičiai, o dviguba ploto reikšmė – irgi sveikasis skaičius, vadinamas pseudo Herono trikampiu.

3 apibrėžimas. Trikampis, kurio kraštinių ilgių kvadratai ir plotas – racionalieji skaičiai, panašus kuriam nors pseudo Herono trikampiui. Be to, panašumo koeficiento kvadratas ir pseudo Herono trikampio plotas yra sveikieji skaičiai.

Irodymas. Sakykime, kad trikampio kraštinių ilgių kvadratai ir jo plotas a^2 , b^2 , c^2 , S – racionalieji skaičiai. Tuomet galima parinkti tokį sveikąjį skaičių k , kad skaičiai a^2k , b^2k , c^2k , Sk yra sveikieji. Trikampis su kraštinėmis $a\sqrt{k}$, $b\sqrt{k}$, $c\sqrt{k}$ yra panašus duotajam ir panašumo koeficiento kvadratas yra sveikasis skaičius, jo pusperimetris yra $\bar{p} = (a\sqrt{k} + b\sqrt{k} + c\sqrt{k})/2 = pk$, čia $p = (a + b + c)/2$. Taikydami Herono formulę gauname, kad

$$Sk = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}k = \sqrt{\bar{p}(\bar{p}-a)(\bar{p}-b)(\bar{p}-c)}.$$

Taigi trikampis su kraštiniais $a\sqrt{k}$, $b\sqrt{k}$, $c\sqrt{k}$ plotas yra sveikasis skaičius Sk .

1 išvada. *Trikampis, kurio kraštinių ilgių kvadratai yra racionalieji skaičiai, o kurio nors kampo kotangentas yra racionalusis skaičius, yra panašus pseudo Herono trikampiui. Be to, panašumo koeficiento kvadratas ir pseudo Herono trikampio plotas yra sveikieji skaičiai.*

Irodymas. Sakykime, kad trikampio kraštinių kvadratai a^2 , b^2 , c^2 ir kampo γ prieš kraštinę c kotangentas yra racionalieji skaičiai. Jei duotojo trikampio plotas lygus S , tai teisingos lygybės

$$\sin \gamma = \frac{2S}{ab}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (1)$$

Iš čia gauname, kad trikampio plotas $S = (a^2 + b^2 - c^2)/4 \operatorname{ctg} \gamma$ yra racionalusis skaičius. Taigi išvados teisingumas išplaukia iš 1 teoremos.

1 teorema leidžia gauti ryšį tarp Herono ir pseudo Herono trikampių.

1 teorema. *Sakykime, kad Herono trikampio kraštinių ilgių yra a , b , c , jo plotas – S_{abc} , o jo pusiauakraštinių ilgių – m_a , m_b , m_c . Egzistuoja trikampis, kurio kraštinės lygios ir lygiagrečios duotojo trikampio pusiauakraštinėms, jo plotas $S_{abc} = 3/4S_{m_a m_b m_c}$, o jis su panašumo koeficientu lygiu 2 panašus pseudo Herono trikampiui.*

Irodymas. Tai, kad egzistuoja trikampis, kurio kraštinės lygios ir lygiagrečios duotojo trikampio pusiauakraštinėms m_a , m_b , m_c , o jo plotas $S_{abc} = 3/4S_{m_a m_b m_c}$, yra gerai žinomas geometrijos faktas [3]. Teoremos įrodymas išplaukia iš 1 teoremos, nes trikampio pusiauakraštinėms yra teisingos lygybės

$$\begin{aligned} 4m_a^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2, \\ 4m_b^2 &= 2a^2 + 2c^2 - b^2, \\ 4m_c^2 &= 2a^2 + 2b^2 - c^2. \end{aligned}$$

2 Trikampiai su viršūnėmis gardelės Z^2 taškuose

Sakykime, kad plokštumoje nubrėžtos dvi lygiagrečių tiesių šeimos, tarp dviejų gretimų vienos šeimos tiesių atstumas lygus vienetui, o bet kuri vienos šeimos tiesė yra statmena visoms kitos šeimos tiesėms. Šios tiesės dalija plokštumą į vienetinius kvadratus. Visų tiesių susikirtimo taškų aibė vadinama sveikaskaitė gardele (gardele Z^2), o tiesių susikirtimo taškai vadinami gardelės mazgais [6].

1 lema. *Jei trikampio kurių nors dviejų kampų kotangentai yra racionalieji skaičiai, tai ir trečiojo kampo kotangentas yra racionalusis skaičius.*

Irodymas. Sakykime, kad trikampio kampų α ir β kotangentai yra racionalieji skaičiai. Tuomet ir trečiojo kampo γ kotangentas yra racionalusis, nes teisinga lygybė

$$\operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} (180^\circ - (\alpha + \beta)) = -\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}.$$

2 teorema. *Šie teiginiai yra ekvivalentūs:*

- trikampis panašus kuriam nors pseudo Herono trikampiui;*
- kurių nors dviejų trikampio kampų kotangentai yra racionalieji skaičiai;*
- kurių nors dviejų trikampio kampų tangentai yra racionalieji skaičiai arba vieno kampo tangentas – racionalusis skaičius, o kito lygus ∞ ;*
- trikampis panašus tokiam trikampiui, kurio viršūnės yra gardelės Z^2 mazgai.*

Irodymas. (a) \Rightarrow (b) Sakykime, kad duotasis trikampis panašus kuriam nors pseudo Herono trikampiui. Kadangi panašiųjų trikampių kampai lygūs, tai užtenka įrodyti, kad pseudo Herono trikampio dviejų kurių nors kampų kotangentai yra racionalieji skaičiai. Jei a, b, c – pseudo Herono trikampio kraštinių ilgiai, o S – jo plotas, tai trikampio kampui γ prieš kraštinę c teisingos (1) lygybės. Todėl

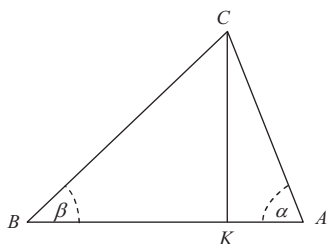
$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{4S}. \quad (2)$$

Kadangi pseudo Herono trikampyje skaičiai $a^2, b^2, c^2, 2S$ yra sveikieji, tai skaičius $\operatorname{ctg} \gamma$ yra racionalusis. Analogiškai įrodome, kad ir bet kurio kito kampo kotangentas yra racionalusis.

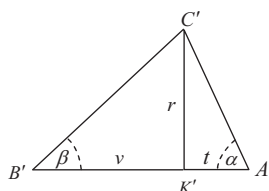
(b) \Leftrightarrow (c) Įrodymas yra akivaizdus.

(b) \Leftrightarrow (d) Sakykime, kad trikampyje $\triangle ABC$ (1 pav.) dviejų kampų kotangentai yra racionalieji skaičiai. Iš 1 lemos išplaukia, kad ir trečiojo kampo kotangentas yra racionalusis skaičius. Taigi, jei fiksuojame bet kurį kampą, tarkime $\angle ACB$, tai kampų $\angle CAB$ ir $\angle CBA$ kotangentai yra racionalieji skaičiai. Bet kuriame trikampyje bent viena aukštinė yra trikampio viduje. Jei trikampis smailusis, tai akivaizdu, o jei trikampyje yra bukasis arba statusis kampas, tarkime $\angle ACB$, tai aukštinė CK nubrėžta iš viršūnės C į kraštinę AB yra trikampio $\triangle ABC$ viduje.

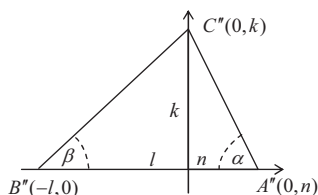
Sakykime, kad trikampio aukštinė CK yra trikampio $\triangle ABC$ viduje. Turime $\operatorname{ctg} \alpha = t/r$, čia t ir r – sveikieji skaičiai. Nubraižykime statųjį trikampį $\triangle A'K'C'$, kurio statiniai lygūs t ir r , tuomet $\angle C'A'K' = \alpha$ (2 pav.). Iš viršūnės C' nubrėžiame tiesę, sudarančią su tiese $A'K'$ kampą β ir kertančią ją taške B' . Trikampis $\triangle B'K'C'$ – statusis ir $v = r \operatorname{ctg} \beta$ – racionalusis skaičius. Kadangi trikampių



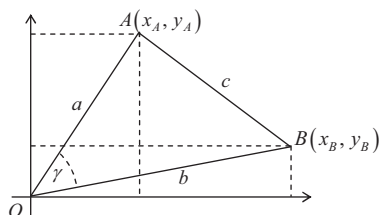
1 pav. $\triangle ABC$.



2 pav. $\triangle A'B'C'$.



3 pav. $\triangle A''B''C''$.



4 pav. $\triangle OAB$.

$\triangle A'K'C'$ ir $\triangle B'K'C'$ statiniai t ir r – sveikieji, o statinis v – racionalusis, tai, padauginę iš atitinkamo daugiklio d , gauname du stačiuosius trikampius $\triangle A''K''C''$ ir $\triangle B''K''C''$ (3 pav.), kurių statiniai $n = dt$, $n = dr$ ir $l = dv$ yra sveikieji skaičiai. Tada trikampis $\triangle A''B''C''$, kurio viršūnių koordinatės $A''(n, 0)$, $B''(-l, 0)$ ir $C''(k, 0)$ yra sudarytas iš trikampių $\triangle A''K''C''$ ir $\triangle B''K''C''$, panašių trikampiams $\triangle A'K'C'$ ir $\triangle B'K'C'$, todėl $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ ir trikampio $\triangle A''B''C''$ viršūnės yra gardelės Z^2 mazguose. Kadangi $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, tai $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

(d) \Rightarrow (a) Sakykime, kad duotasis trikampis panašus trikampiui, kurio viršūnės yra gardelės Z^2 mazgai. Visuomet galime teigti, kad viena trikampio $\triangle OAB$ viršūnė yra koordinačių pradžios taške (4 pav.). Trikampis $\triangle OAB$ yra ieškomasis pseudo Herono trikampis, tenkinantis teoremos sąlygos a). Tikrai, pagal Pitagoro teoremą gauname, kad

$$a^2 = x_A^2 + y_A^2, \quad b^2 = x_B^2 + y_B^2, \quad c^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2, \quad (3)$$

čia $x_A, y_A, x_B, y_B \in Z$. Taigi, šio trikampio kraštinių kvadratai yra sveikieji skaičiai. Kaip žinoma, jei trikampio viršūnių koordinatės yra $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ir $C(x_3, y_3)$, tai jo plotas apskaičiuojamas pagal formulę

$$S = 1/2 |(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)|.$$

Kadangi trikampio $\triangle ABC$ viršūnių koordinatės yra sveikieji skaičiai, tai dvigubas trikampio plotas yra sveikasis skaičius:

$$2S = |(y_B x_A - x_B y_A)|. \quad (4)$$

(d) \Leftrightarrow (b) Sakykime, kad duotasis trikampis yra panašus trikampiui, kurio viršūnės yra gardelės Z^2 mazguose. Visuomet galime teigti, kad vieno trikampio $\triangle OAB$ viršūnė yra koordinačių pradžios taške (4 pav.). Kadangi panašiųjų trikampių kampai ly-

gūs, tai užtenka įrodyti, kad trikampio su viršūnėmis gardelės Z^2 mazguose, dviejų kurių nors kampų kotangentai yra racionalieji skaičiai. Turime, kad $x_A, y_A, x_B, y_B \in Z$. Jei γ – kampas prieš kraštinę c , tai iš (2), (3) ir (4) lygybių išplaukia, kad $\operatorname{ctg} \gamma$ – racionalusis skaičius. Analogiškai įrodome, kad ir bet kurio kito kampo kotangentas yra racionalusis.

3 teoremos teiginys (c) \Leftrightarrow (d) įrodytas darbe [1]. Mes teiginį (d) \Rightarrow (c) įrodėme kitu būdu.

3 Atviros problemos

Heronio trikampių klasės išplėtimas iki pseudo Herono trikampių klasės leidžia nagrinėti problemas, analogiškas Herono trikampių problemoms. Suformuosime tris pseudo Herono trikampių problemas.

Iš 3 teoremos išplaukia, kad Herono trikampiui galima rasti panašų trikampį, kurio viršūnės yra gardelės Z^2 mazgai. Kaip jau minėta, bet kurio Herono trikampio viršūnes galima patalpinti gardelės Z^2 mazguose (netaikant panašumo) [4, 7]. Analogišką klausimą galima kelti pseudo Herono trikampiui.

1 problema. *Bet kurio pseudo Herono trikampio viršūnės gali būti gardelės Z^2 mazgai.*

Minėjome, kad egzistuoja be galo daug Herono trikampių, kurių plotas lygus duotajam skaičiui $S > 0$ [2]. Iš čia seka, kad egzistuoja be galo daug pseudo Herono trikampių, kurių plotas lygus S . Todėl natūralu suformuluoti problemą.

2 problema. *Bet kuriam duotajam skaičiui $S > 0$ egzistuoja be galo daug pseudo Herono trikampių, kurių plotas lygus S , ir bent vienos kraštinės ilgis nėra sveikasis skaičius.*

Sakykime, kad pseudo Herono trikampio kraštinių ilgiai yra a, b, c , jo plotas lygus S , o apibrėžto apskritimo spindulio ilgis lygus R . Iš lygybės $R = abc/4S$ seka, kad R^2 yra racionalusis skaičius.

3 problema. *Sakykime, kad teigiamo skaičiaus kvadratas yra sveikasis skaičius. Reikia rasti būtinas ir pakankamas sąlygas, kad šis skaičius būtų apie pseudo Herono trikampį apibrėžto apskritimo spindulys arba skersmuo.*

Darbe [5] gautos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad duotasis teigiamas skaičius būtų apie Herono trikampį apibrėžto apskritimo spindulys arba skersmuo.

Literatūra

- [1] M.J. Beeson. Triangles with vertices on lattice points. *Amer. Math. Monthly*, **99**(3):243–252, 1992.
- [2] E.H. Goins and D. Maddox. Heron triangles via elliptic curves. *Rocky Mountain J. Math.*, **36**:1511–1526, 2006.
- [3] N. Hungerbuhler. Proof without words: the triangle of medians has three-fourths the area of the original triangle. *Math. Mag.*, **72**:142, 1999.

- [4] S.H. Marshall and A.R. Perlis. Heronian tetrahedra are lattice tetrahedra. *Amer. Math. Monthly*, **120**(2):140–149, 2013.
- [5] R. van Luijk. The diameter of the circumcircle of a heron triangle. *Elem. der Math.*, **63**(3):118–121, 2013.
- [6] V.V. Vavilov and A.V. Ustinov. *Mnogougolniki na reshjotkah*. MCNMO, Moscow, 2006.
- [7] P. Yiu. Heronian triangles are lattice triangles. *Amer. Math. Monthly*, **108**(3):261–263, 2001.

SUMMARY

A rational cotangents of the angles of a triangle*E. Mazėtis, G. Melnichenko*

We investigate how rational values cotangents angles of a triangle influence of its properties. The main result: cotangents of any two angles of a triangle are rational then, and only then, when a triangle similar to a triangle whose squares of sides are integer and twice the area is an integer.

Keywords: Heronian triangles, pseudo Heronian triangles, integer lattice.