Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
57 t., 2016, 89–93
ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Apie vieno brėžimo uždavinio neišsprendžiamumą II

Jevgenijus Kirjackis[1], **Edmundas Mazėtis**[2,3], **Grigorijus Melničenko**[3]

[1] *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentaliųjų mokslų fakultetas*
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
[2] *Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
[3] *Lietuvos edukologijos universitetas, Gamtos, matematikos ir technologijų fakultetas*
Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius

E. paštas: jk@vgtu.lt, gmelnicenko@gmail.com, edmundas.mazetis@leu.lt

Santrauka. Straipsnyje įrodoma, kad skriestuvu ir liniuote negalima nubrėžti trikampio, kai duotas kampas ir iš kitų skirtingų kampų viršūnių išeinančios pusiaukraštinė ir pusiaukampinė. Išnagrinėti atskiri atvejai, kai toks trikampio brėžimas yra galimas.

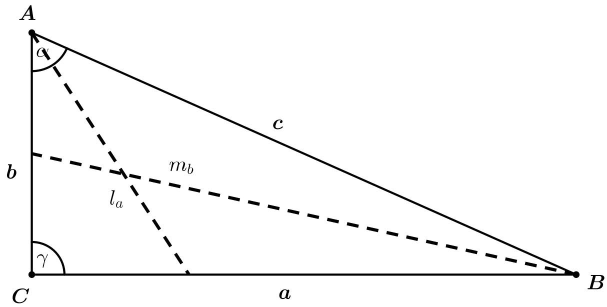
Raktiniai žodžiai: trikampis, pusiaukraštinė, pusiaukampinė, brėžimas skriestuvu ir liniuote, kubinė lygtis.

Įvadas

Straipsnyje [3] įrodyta, kad skriestuvu ir liniuote bendruoju atveju negalima nubrėžti trikampio, kai duotas jo kampas ir iš kito kampo nubrėžtos aukštinė bei pusiaukampinė. Šiame darbe autoriai įrodo, kad bendruoju atveju negalima nubrėžti trikampio, kai duotas jo kampas ir iš kitų skirtingų viršūnių išvestos pusiaukraštinė bei pusiaukampinė.

Sakykime, kad duotas trikampio ΔABC kampas $\angle C = \gamma$, pusiaukampinės, išeinančios iš viršūnės A, ilgis – l_a, pusiaukraštinės nubrėžtos iš viršūnės A ilgis – m_a, o pusiaukraštinės, išvestos iš viršūnės B, ilgis yra m_b. Autoriai [3] darbe įrodė, kad negalima skriestuvu ir liniuote nubrėžti trikampį, kai duota γ, l_a ir m_a, suvedant uždavinį į trečiojo laipsnio lygties šaknų nubrėžimą. Darbe [4] įrodomas negalimumas nubrėžti trikampį atskiru atveju, kai $\gamma = 90°$, $l_a = 1$ ir $m_a = 1$, bet neįrodoma, kad trikampis su tokiais elementais egzistuoja. Mes nagrinėjame atskirą atvejį, kai duota $\gamma = 90°$, $l_a = \sqrt{3}$ ir $m_b = 3$. Įrodoma, kad galima nubrėžti trikampį, tokiu atskiru atveju, kai duota $\gamma = 90°$, $l_a = 1$ ir $m_b = \sqrt{4026}/8$. Taip pat įrodoma, kad bet kurioms duotoms atkarpoms l_a ir m_b, tenkinančioms sąlygą $2m_b > l_a$, egzistuoja statusis trikampis ΔABC, kurio kampas C yra statusis, kampo A pusiaukampinė lygi l_a, o iš viršūnės B išvesta trikampio pusiaukraštinė lygi m_b ir atvirkščiai.

Tokius ir panašius tyrinėjimus gali atlikti vyresnių klasių mokiniai, besidomintys matematika.



1 pav.

1 Kubinės lygties šaknų braižymas

Daugelis klasikinių brėžimo skriestuvu ir liniuote uždavinių sprendžiami, suvedant juos į kubinių lygčių šaknų brėžimą. Klasikiniai tokio tipo uždavinių pavyzdžiai – tai kubo sudvigubinimas, kampo trisekcija, taisyklingojo septyniakampio braižymas. Pastebėkime, kad egzistuoja kampai (pvz., 90° kampas), kuriems kampo trisekcija atliekama skriestuvu ir liniuote. Bet bendruoju atveju nėra procedūros, įgalinančios skriestuvu ir liniuote padalinti į tris lygias dalis bet kurį kampą.

Klasikinių uždavinių neišsprendžiamumas seka iš tokio tvirtinimo, kurį taikysime ir mūsų nagrinėjamu atveju.

1 teorema. *(Žr. [1, p. 136], [2, p. 163].) Jei kubinė lygtis su racionaliaisiais koeficientais*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

neturi racionaliųjų sprendinių, tai nė vienas šios lygties sprendinys nenubrėžiamas skriestuvu ir liniuote.

2 Kubinė lygtis, siejanti stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinusą ir iš skirtingų smailiųjų kampų viršūnių išeinančiomis pusiaukampine ir pusiaukraštine

2 teorema. *Sakykime, kad trikampyje ΔABC kampas $\angle C = \gamma = 90°$, atkarpa l_a yra kampo $\angle A = \alpha$ pusiaukampinė, o atkarpa m_b– pusiaukraštinė nubrėžta iš viršūnės B. Tuomet kampo $\angle A = \alpha$ kosinusas $x = \cos\alpha$ yra lygties*

$$3x^3 + kx^2 - 4x - 4 = 0, \tag{2}$$

čia $k = (8m_b^2 + 3l_a^2)/l_a^2$, sprendinys.

Įrodymas. Sakykime, kad trikampis ΔABC (1 pav.) tenkina teoremos sąlygas. Tuomet teisinga lygybė

$$b = l_a \cos\frac{\alpha}{2} = l_a\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \tag{3}$$

Pagal Pitagoro teoremą $4m_a^2 = a^2 + 4b^2$, todėl

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8m_b^2 - l_a^2\cos\alpha - l_a^2}{2}}. \tag{4}$$

Kadangi $\sin\alpha/\cos\alpha = a/b$, tai

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{8m_b^2 - l_a^2\cos\alpha - l_a^2}{4l_a^2(1+\cos\alpha)},$$

t. y.,

$$\frac{(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{8m_b^2 - l_a^2\cos\alpha - l_a^2}{4l_a^2(1+\cos\alpha)}.$$

Atlikę veiksmus, gauname, kad $x = \cos\alpha$ yra (2) lygties sprendinys.

3 Negalimumas nubrėžti skriestuvu ir liniuote trikampį, kai duota kampas ir iš kitų skirtingų kampų viršūnių išvestos pusiaukampinė ir pusiaukraštinė

Kaip ir [3] darbe, brėžimą trikampio, kai duota γ, l_a ir m_b, išnagrinėsime atskirais atvejais. Pradėsime nuo to, kad įrodysime teiginį apie stačiojo trikampio egzistavimą, kai duota iš skirtingų smailiųjų kampų viršūnių išeinančios pusiaukampinė ir pusiaukraštinė.

3 teorema. *Jei l_a ir m_b – dvi atkarpos, tenkinančios sąlygą $2m_b > l_a$, tuomet egzistuoja statusis trikampis ΔABC, kurio kampas C yra statusis, atkarpa l_a yra kampo A pusiaukampinė, o atkarpa m_b – pusiaukraštinė, nubrėžta iš viršūnės B.*

Įrodymas. Sakykime, kad $k = (8m_b^2 + 3l_a^2)/l_a^2$, ir išnagrinėkime (2) lygtį. Įrodysime, kad su visomis l_a ir m_b reikšmėmis ši lygtis turi sprendinį, esantį intervale $[0,1]$. Nagrinėkime funkciją $f(x) = 3x^3 + kx^2 - 4x - 4$. Akivaizdu, kad $f(0) = -4$, o $f(1) = k - 5$. Iš nelygybės $2m_b > l_a$ lengvai įrodoma, kad $f(1) = k - 5 > 0$. Iš teoremos apie tolydžių funkcijų nulius seka, kad (2) lygtis turi bent vieną sprendinį, tenkinantį sąlygą $0 < x_0 < 1$. Todėl egzistuoja toks smailusis kampas $0 < \alpha < 90^\circ$, kad $x_0 = \cos\alpha$. Taigi galima nubrėžti šią lygybę tenkinantį smailųjį kampą $\angle A = \alpha$. Tuomet brėžiame kampo $\angle A$ pusiaukampinę, joje atidedame atkarpą $AL = l_a$. Iš taško L brėžiame statmenį kuriai nors kampo $\angle A$ kraštinei, jis kerta to kampo kraštines taškuose B ir C. Gauname statųjį trikampį ΔABC ($\angle C = \gamma = 90^\circ$) su smailiuoju kampu $\angle A = \alpha$ ir šio kampo pusiaukampine l_a. Sakykime, kad šio trikampio pusiaukraštinės, nubrėžtos iš viršūnės B, ilgis lygus $\bar{m}_b$. Tuomet kampo $\angle A = \alpha$ kosinusas $\cos\alpha$ tenkina dvi lygtis

$$\begin{aligned} &3x^3 + kx^2 - 4x - 4 = 0,\\ &3x^3 + \bar{k}x^2 - 4x - 4 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

čia $\bar{k} = (8\bar{m}_b^2 + 3l_a^2)/l_a^2$ ir $k = (8m_b^2 + 3l_a^2)/l_a^2$. Iš (5) lygybių gauname, kad $\bar{k} = k$, taigi $\bar{m}_b = m_b$. Iš čia ir išplaukia stačiojo trikampio, tenkinanšio teoremos sąlygas, egzistavimas.

4 teorema. *Bendruoju atveju skriestuvu ir liniuote negalima nubrėžti trikampio, kai duotas jo kampas, ir iš kitų skirtingų viršūnių nubrėžtos pusiaukampinė bei pusiaukraštinė.*

Įrodymas. Išnagrinėkime atskirą atvejį. Tarkime, reikia nubrėžti trikampį ΔABC, kurio $\angle C = \gamma = 90°$, $l_a = \sqrt{3}$ ir $m_b = 3$. Iš 3 teoremos seka, kad toks trikampis egzistuoja. Šiuo atveju $k = (8m_b^2 + 3l_a^2)/l_a^2 = (8 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3)/3 = 27$. Tuomet (2) lygtis tampa tokia

$$3x^3 + 27x^2 - 4x - 4 = 0. \tag{6}$$

Įrodysime, kad (6) lygtis neturi racionaliųjų sprendinių. Keičiame $x = y - 3$ ir gauname lygtį $3y^3 - 85y + 170 = 0$. Akivaizdu, kad užtenka patikrinti, ar ši lygtis turi racionaliųjų sprendinių. Sakykime, kad racionalusis skaičius m/n, čia m ir n – tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai, yra šios lygties sprendinys. Tuomet yra teisinga lygybė $3m^3 - 85mn^2 + 170n^3 = 0$, t. y., lygybė $3m^3 = 5n^2(13m - 34n)$. Iš jos seka, kad $m = 5r$, čia r – sveikasis skaičius. Iš čia gauname, kad $3 \cdot 25r^3 = n^2(5 \cdot 13r - 34n)$. Taigi n irgi dalijasi iš 5. Gavome prieštarą tvirtinimui, kad trupmena m/n yra nesuprastinama.

Anksčiau įrodėme, kad trikampis ΔABC, kuriame $\gamma = 90°$, $l_a = \sqrt{3}$ ir $m_b = 3$ egzistuoja. Sakykime, kad jis nubraižomas skriestuvu ir liniuote. Tuomet skriestuvu ir liniuote yra nubrėčiamas kampas $\angle A = \alpha$, kurio kosinusas lygus $\cos\alpha$: brėžiamas statusis trikampis, kurio įžambinė $AB = 1$, o statinis $AC' = \cos\alpha$. Taigi atkarpa, kurios ilgis lygus $\cos\alpha$, yra nubraižoma skriestuvu ir liniuote. Bet $\cos\alpha$ yra (2) lygties sprendinys, o ši lygtis neturi racionaliųjų sprendinių. Iš 1 teoremos seka, kad šios lygties sprendiniai nenubraižomi skriestuvu ir liniuote. Taigi atkarpa, kurios ilgis $\cos\alpha$, nenubrėžiama skriestuvu ir liniuote. Gautoji prieštara įrodo teoremą.

Parodysime, kad atskirais atvejais skriestuvu ir liniuote galima nubrėžti trikampį, kai žinomas jo kampas ir iš skirtingų kitų kampų viršūnių išvestos pusiaukampinė ir pusiaukraštinė. Išnagrinėsime uždavinį:

Uždavinys. Nubrėžkime trikampį ΔABC, kuriame $\angle C = \gamma = 90°$, $l_a = 1$ ir $m_b = \sqrt{4026}/8$.

Analizė. Sakykime, kad trikampis ΔABC nubraižytas. Tuomet $(8m_b^2 + 3l_a^2)/l_a^2 = 45/2$, o racionalusis skaičius $x_0 = 1/2$ yra (2) lygties sprendinys. Iš čia gauname, kad $\alpha = 60°$, o iš (3) ir (4) lygybių seka, kad $a = \sqrt{2007/32}$ ir $b = \sqrt{3}/2$.

Brėžimas. Skriestuvu ir liniuote brėžiame atkarpas, kurių ilgiai lygūs $\sqrt{3}$ ir $\sqrt{2007/32}$ ([4, pp. 120–123]; [1, pp. 146–148]). Tada nubrėžiame statųjį trikampį, kurio statiniai lygūs $a = \sqrt{2007/32}$ ir $b = \sqrt{3}/2$. Iš (3) ir (4) lygybių surandame, kad $l_a = 1$ o $m_b = \sqrt{4026}/8$, t. y., nubrėžtas trikampis tenkina uždavinio sąlygą.

Pastebėkime, kad 3 teoremos sąlygoje duota nelygybė $2m_b > l_a$ yra ne tik pakankama stačiojo trikampio egzistavimo sąlyga, bet ir būtina. Iš tikrųjų, iš (2) išplaukia, kad stačiojo trikampio (1 pav.) pusiaukampinei teisinga lygybė

$$l_a = \frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{b}{c}}} = \frac{\sqrt{2b^2c}}{\sqrt{b+c}},$$

o iš Pitagoro teoremos jo pusiaukraštinei – lygybė $2m_b = \sqrt{4a^2 + b^2}$. Bet $a^2 = c^2 - b^2$, taigi $2m_b = \sqrt{4c^2 - 3b^2}$. Kadangi $c > b$, tai

$$\begin{aligned}(b+c)\big((2m_b)^2 - l_a^2\big) &= (b+c)\big(4c^2 - 3b^2\big) - 2b^2c \\ &= 4bc^2 - 3b^3 + 4c^3 - 3b^2c - 2b^2c \\ &= 8bc^2 + 3b^2c + 4c^3 - 8b^2c - 3b^3 - 4bc^2 \\ &= (c-b)\big(8bc + 3b^2 + 4c^2\big) > 0.\end{aligned}$$

Todėl $2m_b - l_a > 0$ arba $2m_b > l_a$.

Autoriai palieka skaitytojams savarankiškai išsiaiškinti, ar nelygybė $2m_b > l_a$ yra būtina ir pakankama bet kurio trikampio (nebūtinai stačiojo) egzistavimo sąlyga.

Literatūra

[1] R. Courant and H. Robbins. *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford University Press, Oxford, 2nd edition, 1996.

[2] R. Courant and H. Robbins. *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Moskva, MCNMO, 2001 (in Russian).

[3] J. Kirjackis and E. Mazėtis ir G. Melničenko. Apie vieno brėžimo uždavinio neišsprendžiamumą. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B.*, **56**:70–74, 2015.

[4] O. Krotenheerdt. Zur theorie der dreieckskonstruktionen. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Naturw. Reihe*, **15**:677–700, 1966.

SUMMARY

On the insolubility of one drawing problem II

J. Kirjackis, G. Melnichenko and E. Mazetis

It is shown in the article that, in general, it is not possible to draw a triangle using a compass and a straightedge given an angle and a bisector and a median drawn from the vertices of another different angles. It is shown in which particular cases a triangle can be drawn.

Keywords: triange, median, bisector, drawing with compass and straightedge, cubic equation.