LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI
51 tomas, 2010, 71–74

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Hiperpaviršių kreivumai

Kazimieras Navickis

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame darbe nagrinėjami n-matės Euklido erdvės hiperpaviršių kreivumai. Išvedamos formulės pagrindinių kreivumų simetrinėms funkcijoms apskaičiuoti.

Raktiniai žodžiai: hiperpaviršius, Gauso kreivumas, vidutinis kreivumas.

Tarkime, kad S – hiperpaviršius, n-matėje Euklido erdvėje, apibrėžtas parametrinėmis lygtimis

$$S : x^i = \frac{X^i(u^\alpha)}{t(u^\alpha)};$$

čia $i, j, \ldots = 1, \ldots, n$, $\alpha\beta, \ldots = 1, \ldots, n-1$. Pažymėkime

$$x^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \qquad x^i_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial u^\beta}, \qquad \ldots.$$

Iš hiperpaviršiaus S lygties

$$S : \vec{r} = \bigl\{x^i\bigl(u^\alpha\bigr)\bigr\}$$

gauname, kad

$$\vec{r}_\alpha = x^i_\alpha \vec{e}_i, \qquad \vec{r}_{\alpha\beta} = x^i_{\alpha\beta}\vec{e}_i, \qquad \ldots;$$

čia $\{\vec{e}_i\}$ ortonormuotoji n-matės Euklido erdvės bazė. Hiperpaviršiaus S normalės vektorius

$$\vec{N} = \bigl[\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_{n-1}\bigr] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n \\ x^1_1 & x^2_1 & \ldots & x^n_1 \\ x^1_2 & x^2_2 & \ldots & x^n_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^1_{n-1} & x^2_{n-1} & \ldots & x^n_{n-1} \end{vmatrix} = \bar{S}^i \vec{e}_i.$$

Iš čia gauname, kad

$$\vec{N}^2 = \bigl(\bar{S}^i \vec{e}_i\bigr) \cdot \bigl(\bar{S}^j \vec{e}_j\bigr) = \delta_{ij} \bar{S}^i \bar{S}^j.$$

Kadangi

$$x^i_\alpha = \frac{1}{t^2}\bigl(tX^i_\alpha - t_\alpha X^i\bigr), \qquad x^j_\beta = \frac{1}{t^2}\bigl(tX^j_\beta - t_\beta X^j\bigr),$$

tai hiperpaviršiaus S metrinis tenzorius

$$g_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta = \delta_{ij} x^i_\alpha x^j_\beta$$

arba

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{t^4}\left(p_{\alpha\beta}t^2 - 2q_{\alpha\beta}t + r_{\alpha\beta}\right);$$

čia

$$p_{\alpha\beta} = \delta_{ij}X^i_\alpha X^j_\beta, \qquad q_{\alpha\beta} = \delta_{ij}(t_\alpha X^i X^j_\beta + t_\beta X^j X^i_\alpha), \qquad r_{\alpha\beta} = \delta_{ij}X^i X^j t_{\alpha\beta}.$$

Pažymėkime

$$g = \det(g_{\alpha\beta}).$$

Matome, kad dydis $t^{4(n-1)} \cdot g$ yra $2(n-1)$-ojo laipsnio polinomas t atžvilgiu. Matrica $t^4 \cdot (g_{\alpha\beta})$ yra t-matrica:

$$t^4 \cdot G = t^2 \cdot P - 2t \cdot P + R,$$

čia

$$G = (g_{\alpha\beta}), \qquad P = (p_{\alpha\beta}), \qquad Q = (q_{\alpha\beta}), \qquad R = (r_{\alpha\beta}).$$

Normalės vektoriaus $\vec{N}$ ilgis

$$|\vec{N}| = \sqrt{g}.$$

Kadangi

$$X^i = t \cdot x^i,$$

tai

$$X^i_\alpha = t_\alpha x^i + t x^i_\alpha, \qquad X^i_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}x^i_\beta + t_\alpha x^i_\beta + t_\beta x^i_\alpha + t x^i_{\alpha\beta}.$$

Normalės $\vec{N}$ koordinatės

$$\bar{S}^1 = \begin{vmatrix} x^2_1 & \dots & x^n_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x^2_{n-1} & \dots & x^n_{n-1} \end{vmatrix}, \qquad \dots, \qquad \bar{S}^n = (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} x^1_1 & \dots & x^{n-1}_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x^1_{n-1} & \dots & x^{n-1}_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Kita vertus,

$$\begin{aligned} S^1 &= \begin{vmatrix} X^2_1 & \dots & X^n_1 & t_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X^2_{n-1} & \dots & X^n_{n-1} & t_{n-1} \\ X^2 & \dots & X^n & t \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} t_1x^2 + tx^2_1 & \dots & t_1x^n + tx^n_1 & t_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1}x^2 + tx^2_{n-1} & \dots & t_{n-1}x^n + tx^n_{n-1} & t_{n-1} \\ tx^2 & \dots & tx^n & t \end{vmatrix} \\ &= t^n \cdot \begin{vmatrix} x^2_1 & \dots & x^n_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x^2_{n-1} & \dots & x^n_{n-1} \end{vmatrix} = t^n \cdot \bar{S}^1, \qquad \dots, \\ S^n &= (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} X^1_1 & \dots & X^{n-1}_1 & t_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X^1_{n-1} & \dots & X^{n-1}_{n-1} & t_{n-1} \\ X^1 & \dots & X^{n-1} & t \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot t^n \cdot \bar{S}^n. \end{aligned}$$

Matome, kad

$$S^i = t^n \bar{S}^i.$$

Iš čia gauname, kad

$$|\vec{N}|^2 = g = (t^n)^{-2}\delta_{ij}S^iS^j, \qquad \sqrt{g} = \frac{1}{t^n}\sqrt{\delta_{ij}S^iS^j}.$$

Hiperpaviršiaus S antrosios kvadratinės formos koeficientai

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta} &= \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}\cdot\vec{r}_{\alpha\beta} = \frac{\vec{N}\cdot\vec{r}_{\alpha\beta}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_{n-1},\vec{r}_{\alpha\beta}) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{g}}(\vec{r}_{\alpha\beta},\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_{n-1}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{g}}\cdot\begin{vmatrix} x^1_{\alpha\beta} & \ldots & x^n_{\alpha\beta} \\ x^1_1 & \ldots & x^n_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^1_{n-1} & \ldots & x^n_{n-1}\end{vmatrix} \\
&= \frac{(-1)^n}{t^{n+1}\sqrt{g}}\cdot\begin{vmatrix} X^1_{\alpha\beta} & \ldots & X^n_{\alpha\beta} & t_{\alpha\beta} \\ X^1_1 & \ldots & X^n_1 & t_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X^1_{n-1} & \ldots & X^n_{n-1} & t_{n-1} \\ X^1 & \ldots & X^n & t\end{vmatrix} = \frac{(-1)^n}{t^{n+1}\sqrt{g}}\cdot\bar{A}_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Iš čia gauname, kad

$$\det(A_{\alpha\beta} = \left(\frac{(-1)^n}{t^{n+1}\sqrt{g}}\right)^{n-1}\cdot\det(\bar{A}_{\alpha\beta}) = \frac{\det(\bar{A}_{\alpha\beta})}{t^{(n-1)(n+1)}(\sqrt{g})^{n-1}}.$$

Hiperpaviršiaus S pilnasis arba Gauso kreivumas

$$K = \frac{\det(A_{\alpha\beta})}{\det(g_{\alpha\beta})} = \frac{\det(A_{\alpha\beta})}{t^{n^2-1}\cdot g^{(n+1)/(n-1)}}.$$

Hiperpaviršiaus S pagrindiniai kreivumai $k_1,\ldots,k_{n-1}$ taške $M_0\in S$ yra $(n-1)$-ojo laipsnio lygties

$$\det(A_{\alpha\beta} - k\cdot g_{\alpha\beta}) = 0$$

šaknys. Aišku,

$$K = k_1\cdot k_2\cdot\cdots\cdot k_{n-1}.$$

Hiperpaviršiaus S vidutinis kreivumas

$$H = \frac{k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}}{n-1}.$$

Tarkime, kad matricos $(g_{\alpha\beta})$ atvirkštinė matrica yra $(g^{\alpha\beta})$. Tada

$$H = \frac{g^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}}{n-1}$$

arba

$$H = \frac{(-1)^n}{(n-1)\sqrt{g}}g^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}.$$

Darbe išvedamos kiek sudėtingesnės formulės ir kitoms simetrinėms pagrindinių kreivumų funkcijoms. Iš gautų formulių atskiruoju atveju $t=1$ gaunamos klasikinės formulės [1].

Literatūra

[1] M.P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, Englewod Cliffs, NJ, 1976.

SUMMARY

Curvatures of hypersurfaces
K. Navickis

In this article we generalize some classical formulas for curvatures of hypersurfaces in the n-dimensional Euclidean space using the homogeneous formulas.

Keywords: hypersurface, Gauss curvature, mean curvature.