Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai ISSN 0132-2818
51 tomas, 2010, 75–79 www.mii.lt/LMR/

О топологической характеристике некоторых свойств мер посредством очановских топологий

Гинтарас Пранинскас

Клайпедский университет
Г. Манто 84, 92294 Клайпеда
E-mail: gintaras.p@zebra.lt

Аннотация. В статье дается топологическая характеристика продолжения меры, так же топологическая характеристика радоновости и регулярности мер на σ-алгебре Борелевских множеств топологического пространства посредством экспоненциальных топологий типа Очана.

Ключевые слова: топологическое пространство, алгебра и σ-алгебра множеств, пространство подмножеств, продолжение меры, радоновская и регулярная меры, топология типа Очана на пространстве подмножеств..

В статье все топологические пространства считаем хаусдорфавыми. Будем рассматривать подпространства пространства $\mathcal{P}^*(X)$. Точками последнего являются все подмножества пространства X (либо просто множества X без заданой топологии на нем) включая и пустое подмножество $\varnothing$; причем подмножеству $P \subset X$ соответствует точка $(P) \in \mathcal{P}^*(X)$.

Пусть $\mathcal{M}$ некоторое подпространство $\mathcal{P}^*(X)$ для некоторого множества X. Для подмножеств $A, B \subset X$ определяем подмножество $[A, B]_{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ формулой $[A, B]_{\mathcal{M}} = \{A \subset P \subset X \setminus B,\ (P) \in \mathcal{M}\}$. В том случае, когда понятно, какое подпространство $\mathcal{M}$ пространства $\mathcal{P}^*(X)$ имеется в виду, подмножество $[A, B]_{\mathcal{M}}$ будем обозначать просто $[A, B]$. Заметим, что для множеств $[A_1, B_1]$ и $[A_2, B_2]$ имеет место соотношение $[A_1, B_1] \cap [A_2, B_2] = [A_1 \cup A_2; B_1 \cup B_2]$, что позволяет привести ниже следующее определение.

Определение 1. Пусть X некоторое множество (в частности топологическое пространство) и $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}^*(X)$. Топология с базой $\beta = \{[A, B]\colon A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$ где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ некоторые семейства подмножеств X замкнутые относительно конечных объединений называется $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-топологией (топологией очановского типа). Впервые такие топологии были упомянуты Ю.С. Очаном [4]. В общем виде топологии подобного типа были рассмотрены Р. Кашубой [2]. Топологии подобного типа также рассматривались В.В. Поновым (например [5]).

Определение 2. Мерой на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества X называем функцию $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, (приниманяющую возможно и значение $+\infty$) удовлетворяющую условия:

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) $\mu(A) \geqslant 0$, $A \in \mathcal{A}$,

(3) $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ где: $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ и $A_k \cap A_j = \varnothing$, $k \neq j$.

Мера μ называется конечной если $\mu(X) < \infty$ и σ-конечной если X можно представить в качестве объединения счетного семейства $\{X_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$, чтобы $\mu(X_i) < \infty$. Теперь рассмотрим множество X, алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств X, σ-алгебру $\sigma(\mathcal{A})$ генерируемую алгеброй $\mathcal{A}$ на X, меру μ на $\mathcal{A}$ и ее продолжение μ^* на $\sigma(\mathcal{A})$. Напомним, что мера μ^* на $\sigma(\mathcal{A})$ называется продолжением меры μ на $\mathcal{A}$ если $\mu^*(A) = \mu(A)$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Также напомним теорему о продолжении меры.

Теорема 1. *(Каратеодори о продолжении меры) Предположим, что на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств непустого множества X определена мера μ. Тогда можно найти меру μ^* на σ-алгебре $\sigma(\mathcal{A})$ генерированой алгеброй $\mathcal{A}$ подмножеств X, удовлетворяющую условию $\mu(A) = \mu^*(A)$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Если мера μ является σ-конечной то и мера μ^* σ-конечна и единственная. Если мера μ конечна, то и мера μ^* так же конечна.*

Теорема 2. *Предположим $\mathcal{A}$ алгебра подмножеств множества X и μ конечная мера на ней. Тогда продолжение μ^* меры μ на σ-алгебру $\sigma(\mathcal{A})$ генерируемую алгеброй $\mathcal{A}$ непрерывно в $(\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{A}))$-топологии очановского типа. Обратно если функция μ^* является непрерывным продолжением функции μ с $\mathcal{A}$ на $\sigma(\mathcal{A})$ (как продолжение функции) то μ^* является мерой на $\sigma(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Пусть μ конечная мера на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества X и $\sigma(\mathcal{A})$ σ-алгебра пораждeнная алгеброй $\mathcal{A}$. Так же предположим, что μ^* продолжение меры μ с $\mathcal{A}$ на $\sigma(\mathcal{A})$. Пусть $A \in \sigma(\mathcal{A})$ и $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots$ такие что $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$. Покажем, что μ^* непрерывна в точке (A) в очановской топологии $(\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{A}))$. Беря $A'_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_k$ неуменьшая общности рассуждений можем считать, что $A_i \subset A_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$ при этом $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$. Для окрестности $\mu^*(A)$: $\mathcal{U} = (\mu^*(A) - \varepsilon,\ \mu^*(A) + \varepsilon)$ (где $\varepsilon > 0$) выберем A_{i^*} (так как $\mu^*(A_i) \to \mu(A),\ i \to \infty$) чтобы $\mu(A_{i^*}) \in \mathcal{U}$ тогда $\mathcal{V} = [A_{i^*}, A^C]$ является окрестностью A в $\sigma(\mathcal{A})$ для которой в силу монотонности меры $\mu^*(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$. Значит в силу произвольности $\varepsilon > 0$ $\quad \mu^*$ непрерывна в (A).

Докажем достаточность условия. Пусть $\mathcal{A}$ алгебра на множестве X. Рассмотрим конечную меру μ на $\mathcal{A}$ и ее непрерывное продолжение (как функции) с $\mathcal{A}$ на $\sigma(\mathcal{A})$ в $(\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{A}))$ топологии. Заметим что множество $\mathcal{A}^*$ точек пространства $\sigma(\mathcal{A})^* \subset \mathcal{P}^*(X) \quad \mathcal{A}^* = \{(A)\colon A \in \mathcal{A}\}$ всюду плотно в $\sigma(\mathcal{A})^*$ поскольку из определения базисных множеств очановской $(\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{A}))$-топологии $(K) \in [K, L]$ для всех $(K) \in \mathcal{A}^*$. Пусть теперь μ мера на $\mathcal{A}$ и $\mu^* : \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ непрерывное продолжение μ (как функции с $\mathcal{A}^*$ на $\sigma(\mathcal{A})^*$). Так как $\mathcal{A}^* = \{(A)\colon A \in \mathcal{A}\}$ всюду плотно в $\sigma(\mathcal{A})^* = \{(A)\colon A \in \sigma(\mathcal{A})\}$ и непрерывные функции μ и μ^* на $\mathcal{A}^*$ совпадают, значит они совпадают и на $\sigma(\mathcal{A})^*$. Следовательно μ^* продолжение меры μ с $\mathcal{A}$ на $\sigma(\mathcal{A})$.

Доказательство завершено.

Далее в статье в качестве пространства подмножеств рассмотрим σ-алгебру борелевских множеств $Bor(X)$ топологического пространства X. Напомним что мера μ на X называется борелевской, если у каждой $x \in X$ найдется окрестность U, для которой $\mu(U) < \infty$. Борелевская мера μ на X называется радоновской, если $\mu(A) = \sup\{\mu(C)\colon C \subset A,\ C \in C_4(X)\}$ для каждого $A \in Bor(X)$ (здесь через $C_4(X)$ обозначаем множество всех компактных подмножеств X). Борелевская мера μ на X называется регулярной, если $\mu(A) = \inf\{\mu(E)\colon A \subset E,\ X \setminus E \in C_1(X)\}$ для всех $A \in Bor(X)$ (здесь через $C_1(X)$ обозначаем семейство всех замкнутых подмножеств пространства X).

Теорема 3. *Пусть пространство подмножеств $Bor(X)$ топологического пространства X наделенного $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-топологией, где $\mathcal{A} = C_4(X)$, $\mathcal{B} = Bor(X)$. Борелевская мера μ на X является радоновской тогда и только тогда, когда μ является непрерывной функцией на $Bor(X)$.*

Доказательство. Пусть μ радоновская мера на X. Докажем, что μ непрерывна в каждой точке $(B) \in Bor(X)$. Пусть $U = (\mu(B) - \varepsilon,\ \mu(B) + \varepsilon)$, если $\mu(B) < \infty$ и $U = (M, \infty]$, если $\mu(B) = \infty$ некоторая окрестность $\mu(B)$. В силу радоновости μ найдется $C \subset B$, $C \in C_4(X)$, чтобы $\mu(C) \in U$. Следовательно $\mu([C,\ X \setminus B]) \subset U$ и μ непрерывна в точке (B).

Пусть теперь некоторая борелевская мера μ является непрерывной функцией на пространстве $Bor(X)$ наделенном некоторой $(C_4(X), \mathcal{B})$ топологией. Пусть $(B) \in Bor(X)$ произвольная точка и $U = (\mu(B) - \varepsilon,\ \mu(B) + \varepsilon)$, если $\mu(B) < \infty$ и $U = (M, \infty]$, если $\mu(B) = \infty$ некоторая окрестность $\mu(B)$. Так как μ непрерывно, найдется окрестность $\mathcal{V} = [C, P]$ точки $(B) \in Bor(X)$, чтобы $\mu(\mathcal{V}) \subset U$; следовательно $\mu(C) \in \mathcal{V}$.

В виду произвольности ε (или M, если $\mu(B) = \infty$) заключаем, что $\mu(B) = \sup\{C\colon C \subset B,\ C \in C_4(X)\}$.

Теорема доказана.

Замечание 1. В доказательстве Теоремы 3 содержится доказательство того, что для радоновости некоторой борелевской меры μ на пространстве X достаточно, чтобы μ являлась бы непрерывной функцией на $Bor(X)$ в некоторой $(C_4(X), B)$-топологии, где $\mathcal{B}$ произвольное семейство подмножеств X.

Теорема 4. *Пусть пространство подмножеств $Bor(X)$ топологического пространства X наделено $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-топологией такой, что $\mathcal{A} = Bor(X)$, $\mathcal{B} = C_1(X)$. Борелевская мера μ на X является регулярной тогда и только тогда, когда μ является непрерывной функцией на $Bor(X)$.*

Доказательство. Пусть μ является регулярной мерой на X. Докажем, что μ непрерывна в произвольно выбранной точке $(B) \in Bor(X)$. Пусть $U = (\mu(B) - \varepsilon,\ \mu(B) + \varepsilon)$, если $\mu(B) < \infty$ и $U = (M, \infty]$, если $\mu(B) = \infty$ некоторая окрестность $\mu(B)$ в $[0, \infty]$. В силу регулярности μ найдется $F \in C_1(X)$, $F \cap B = \varnothing$, чтобы $\mu(X \setminus F) \in U$. Следовательно $\mu([B,\ X \setminus F]) \subset U$ и следовательно μ непрерывно в (B).

Пусть теперь некоторая борелевская мера является непрерывной функцией на пространстве $Bor(X)$ наделенном $(\mathcal{A}, C_1(X))$-топологией. Пусть $(B) \in Bor(X)$ произвольная точка и $U = (\mu(B) - \varepsilon, \mu(B) + \varepsilon)$, если $\mu(B) < \infty$ и $U = (M, \infty]$, если $\mu(B) = \infty$, некоторая окрестность $\mu(B)$. Так как μ непрерывно найдется окрестность $\mathcal{V} = [P, F]$ точки $(B) \in Bor(X)$, чтобы $\mu(\mathcal{V}) \subset U$, следовательно $\mu(X \setminus F) \in U$. В виду произвольности ε, если $\mu(B) < \infty$ или M, если $\mu(B) = \infty$ заключаем, что $\mu(B) = \inf\{E\colon B \subset E,\ X \setminus E \in C_1(X)\}$.

Теорема доказана.

Замечание 2. В доказательстве Теоремы 4 содержится доказательство того, что для регулярности некоторой борелевской меры μ на X достаточно, чтобы μ являлась бы непрерывной функцией на $Bor(X)$ в некоторой $(\mathcal{A}, C_1(X))$-топологии, где $\mathcal{A}$ произвольное семейство подмножеств пространства X.

Теорема 5. *Пусть пространство подмножеств $Bor(X)$ топологического пространства X наделено (C_4, C_1)-топологией. Борелевская мера μ является регулярной радоновской мерой на X тогда и только тогда, когда μ является непрерывной функцией на $Bor(X)$.*

Доказательство. В силу Замечания 1 и Замечания 2 борелевская мера μ на пространстве X является регулярной и радоновской, если μ является непрерывной функцией на $Bor(X)$ в (C_4, C_1)-топологии.

Докажем, что регулярная радоновская мера μ является непрерывной функцией на $Bor(X)$ наделенном (C_4, C_1)-топологией. Произвольно выберем точку $(B) \in Bor(X)$. Пусть $U = (\mu(B) - \varepsilon,\ \mu(B) + \varepsilon)$, если $\mu(B) < \infty$ и $U = (M, \infty]$, если $\mu(B) = \infty$ некоторая окрестность $\mu(B)$. В силу радоновости μ найдется $C \subset B,\ C \in C_4(X)$, чтобы $\mu(C) \in U$, а в силу регулярности μ найдется $F \in C_1(X),\ F \cap B = \varnothing$, чтобы $\mu(X \setminus F) \in U$. Следовательно $\mathcal{V} = [C, F]$ является окрестностью (B) в $Bor(X)$ и в силу монотонности меры μ: $\mu(\mathcal{V}) \subset U$. В виду произвольности U μ непрерывна в точке (B), а в виду произвольности (B) непрерывна и вся функция μ.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] R. Engelking. *General topology.* Warszawa, 1978.

[2] R. Kasuba. The generalized Ochan topology in sets of subsets and topological Boolean rings. *Math. Nachr.*, **97**:47–56, 1980.

[3] E. Michael. Topologies on spaces of subsets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71**:152–18, 1951.

[4] Ю.С. Очан. Пространство подмножеств топологического пространства. *Докл. АН СССР*, **32**(2):107–1092, 1941.

[5] В.В. Попов. О нормальности экспоненты в топологиях очановского типа. *Матем. Заметки*, **32**(3):375–384, 1982.

SUMMARY

On topological characterization of some properties of measures using Ocan type topologies

G. Praninskas

In the article is given topological characterization of prolongement of measure from algebra $\mathcal{A}$ subsets to σ-algebra subsets $\sigma(\mathcal{A})$ as prolongement of measure as continuos function from space of subsets $\mathcal{A}$ to space $\sigma(\mathcal{A})$ in some Ocan type topology. The topological of Radon and regularity of measure characterization using Ocan type topologies also is given.

Keywords: Topological space, algebra, σ-algebra, space of subsets, prolongement of measure, Radon and regular measures, Ocan type topologies on space of subsets.

REZIUMĖ

Apie kai kurių mato savybių topologines charakteristikas Očano topologijų pagalba

G. Praninskas

Straipsnyje pateikiama mato pratęsimo iš aibių algebros į jos generuotos σ-algebros topologinė charakteristika t.y. mato tęsinys yra tolydi funkcija tam tikroje Očano topologijoje. Ši sąlyga tolydžiai pratęsiant matą kaip funkciją yra ir mato tęsinio pakankama sąlyga. Straipsnyje taip pat pateikiama Radono ir reguliaraus mato, apibrėžto topologinės erdvės X Borelio aibių σ-algebroje $Bor(X)$ topologinė charakteristika naudojant mato funkcijos tolydumą erdvėje $Bor(X)$ su tam tikra Očano topologija.

Raktiniai žodžiai: Topologinė erdvė, aibių algebra, σ-algebra, poaibių erdvė, mato tęsinys, Radono ir ir reguliarūs matai, Očano tipo topologija poaibių erdvėje.