Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 75–77

2009 metų Europos studentų matematikos olimpiada

Dainius DZINDZALIETA
Matematikos ir informatikos institutas
Akademijos g. 4, 08663 Vilnius
el. paštas: dainiusda@gmail.com

Santrauka. Šiame darbe mes apžvelgiame 2009 metų Vojtech'o Jarnik'o tarptautinės matematikos varžybas, kurios vyko Čekijoje, Ostravos mieste. Mes taip pat pateikiame įdomesnes užduotis ir paprasto uždavinio sprendimą.

Raktiniai žodžiai: olimpiada, Europos, studentų.

1. Įvadas

Kiekvienais metais Čekijoje, Ostravos mieste, vyksta individualios Vojtech'o Jarnik'o tarptautinės matematikos varžybos, kurios dar dėl dalyvių gausos ir dėl to, iš kur dauguma atvažiuoja studentai, vadinamos Europos studentų matematikos olimpiada. Jas organizuoja Ostravos universiteto darbuotojai. Pasitaiko, kad į šias varžybas atvažiuoja ir ne Europos studentai. Šioje olimpiadoje jau ne vieną kartą dalyvavo Vilniaus universiteto studentai. Jiems vadovauja buvęs šios olimpiados dalyvis, o dabar jau mokslų daktaras Paulius Drungilas, kuris dabar jau užsiima organizaciniais reikalais.

Organizacinė veikla yra turbūt ne mažiau įdomi, nei pats dalyvavimas olimpiadoje. Komandos vadovo darbas prasideda jau Lietuvoje, nes kiekvienas atvykęs į olimpiadą pateikia savo uždavinius atrankai į olimpiadą. Atvykus ir užsiregistravus, komandų vadovai susirenka ir balsuoja, kokius uždavinius reiktų įdėti į užduočių komplektus. Po to reikia pasiskirstyti, kas kurį uždavinį taiso ir laukti, kol studentai pateiks sprendimus, po ko ateina pati sunkiausia dalis – tai užduočių tikrinimas ir vertinimas. Dažnai pasitaiko, kad vertintojams reikia būti ypač griežtiems, nes kokia sąlyga, pradžioje atrodžiusi sunkoka, pasirodo per lengva ar atvirkščiai. Tada pasireiškia meninės vertintojų savybės ir gudrumas, nes kitą dieną vyksta darbų gynimas, per kurį nuskriaustas studentas gali užginčyti vertinimą ir pateikti savo argumentus, kodėl jis yra vertas didesnio balo. Tiesa, retai pasitaiko, kad koks studentas smarkiai pagerintų savo situaciją po apeliacijos, nes visgi patirtis yra vertintojų pusėje.

Užduotys parenkamos taip, kad studentai galėtų per daug nežinodami specifinių temų išspręsti bet kurį uždavinį. Kartais net kai kurie dalykai sužinoti universitete trukdo išspręsti paprasčiausią uždavinį, nes puola mintys apie įvairius sunkius dalykus girdėtus per paskaitas. Žinoma, būna išimčių, kada reikia giliai žinoti kurios nors specifinės tematikos dalį.

2009 metų olimpiadoje Vilniaus universiteto pasirodė visai neblogai, vyresniųjų studentų grupėje du studentai (tarp jų ir šio straipsnio autorius) išsprendė po du uždavinius ir surinko po 21 tašką iš 40 galimų. Vertėtų pažymėti, kad pirmąją vietą užėmę studentai pilnai išsprendė tris uždavinius. Kiti komandos atstovai taip pat nepadarė gėdos. Rezultatus taip pat galima rasti oficialiame olimpiados tinklapyje.

2. Užduotys ir vienos iš jų sprendimas

Mes pateikiame keletą įdomesnių 2009 metų olimpiados užduočių, tam kad būtų lengviau pamatyti, kokio sunkumo ir tuo pačiu įdomumo yra sąlygos ir tam, kad būtų galima patiems išspręsti jas. Šias užduotis taip pat galite rasti oficialiame olimpiados puslapyje `http://vjimc.osu.cz/`.

Problem 1. Let ABC be a non-degenerate triangle in the euclidean plane. Define a sequence $(C_n)_{n=0}^{\infty}$ of points as follows: $C_0 := C$, and C_{n+1} is the center of the incircle of the triangle ABC_n. Find $\lim_{n\to\infty} C_n$.

Problem 2. Prove that the number

$$2^{2^k-1} - 2^k - 1$$

is composite (not prime) for all positive integers $k > 2$.

Problem 3. Let E be the set of all continuously differentiable real valued functions f on $[0, 1]$ such that $f(0) = 0$ and $f(1) = 1$. Define

$$J(f) = \int_0^1 \left(1 + x^2\right)\left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x.$$

a) Show that J achieves its minimum value at some element of E.
b) Calculate $\min_{f\in E} J(f)$.

Problem 4. Let A be an $n \times n$ square matrix with integer entries. Suppose that $p^2A^{p^2} = q^2A^{q^2} + r^2 I_n$ for some positive integers p, q, r where r is odd and $p^2 = q^2 + r^2$. Prove that $|\det A| = 1$. (Here I_n means the $n \times n$ identity matrix.)

Mes pateikiame trečiosios užduoties sprendimą taip pat ta pačia kalba, kuria ir reikėjo pateikti sprendimus.

Solution. By the fundamental theorem of Calculus, we have

$$1 = \left|f(1) - f(0)\right| = \left|\int_0^1 \left(f'(x)\right) \mathrm{d}x\right|.$$

Next, by using the Cauchy–Schwartz inequality, we obtain

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \left(f'(x)\right)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\left(f'(x)\right)\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \left(\int_0^1 \left(1+x^2\right)\left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^1 \left(1+x^2\right)\left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

Hence

$$J(f) \geqslant \frac{4}{\pi},$$

and taking $f(x) = \frac{4}{\pi}\arctan x$ we get that $J(\frac{4}{\pi}\arctan x) = 4/\pi$ which proves the part (a) and gives the result for part (b).

Kaip galite pastebėti, nors ir sąlyga skamba gana grėsmingai, bet sprendimas yra iš tiesų gana paprastas net ir pirmo kurso studentui.

Literatūra

1. D. Dzindzalieta. Europos studentų olimpiada'07. *Lith. Math. J.*, 47:230–232, 2007.
2. D. Dzindzalieta. 2007 m. VU studentų olimpiada. Kn.: *Matematika ir matematikos dėstymas – 2007*: *konferencijos pranešimų medžiaga*, Nr. 46. Technologija, Kaunas, 22–23, 2007.
3. D. Dzindzalieta. VU studentų matematikos olimpiadai praėjus. *Lith. Math. J.*, 46:151–152, 2006.
4. Website: `http://vjimc.osu.cz/`.

SUMMARY

D. Dzindzalieta. European student's mathematical olympiad' 09

In this article we talk about Vojtech Jarnķk International Mathematical Competition for students' also called "Europe'09 student olympiad" which was held in Czech Republic, Ostrava. We also give some problems and one solution of not the hardest problem.

Keywords: olympiad, European, student's.