Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 102–107

Naujas iracionalumo įrodymo būdas

Juozas Juvencijus MAČYS
Matematikos ir informatikos institutas
Akademijos g. 4, 08663 Vilnius
el. paštas: jmacys@ktl.mii.lt

Santrauka. Straipsnyje aprašomas būdas, kaip skaičių e ir π iracionalumo įrodymą galima dėstyti studentams ir mokiniams.

Raktiniai žodžiai: skaičius e, skaičius π, iracionalumas, elementarieji metodai.

Įvadas

Šio straipsnio tikslas – supažindinti dėstytojus su trumpais skaičių e ir π iracionalumo įrodymais ir pademonstruoti, kaip tuos įrodymus galima išdėstyti moksleiviams (turime galvoje matematikos būrelius ir geriausius mokinius) ar studentams.

Skaičiaus e iracionalumo įrodymai

Trumpiausias e iracionalumo įrodymas būtų toks (plg. [3]). Funkcijos e^x Teiloro skleidinyje

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

imkime $x = -1$:

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots. \tag{1}$$

Tarkime, kad e – racionalusis skaičius. Tada racionalus ir skaičius e^{-1}, t.y. $e^{-1} = \frac{m}{n}$, kur natūralieji m ir n neturi bendrų daliklių, taigi n – tam tikras fiksuotas skaičius. Įstatę e^{-1} reikšmę į (1) ir abi lygybės puses padauginę iš $(2n-1)!$, perrašome ją taip:

$$(2n-1)!\Big(\frac{m}{n} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{1}{(2n-1)!}\Big) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} + \cdots.$$

Kairėje pusėje turime sveikąjį skaičių, o dešinėje – Leibnico eilutę, todėl jos suma teigiama, bet mažesnė už $\frac{1}{2n}$:

$$0 < (2n-1)!\Big(\frac{m}{n} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{1}{(2n-1)!}\Big) < \frac{1}{2n}. \tag{2}$$

Taigi sveikasis skaičius atsidūrė tarp 0 ir 1. Gauta prieštara reiškia, kad e – iracionalusis skaičius.

Kokių gi reikia žinių tokiam įrodymui suprasti? Matome, kad reikia būti susipažinus su Leibnico eilutėmis ir su Teiloro skleidiniais. Kitaip sakant, toks įrodymas prieinamas studentui, baigusiam pirmąjį kursą.

Paaiškinsime, kaip šį įrodymą galima pritaikyti mokiniui. Pasirodo, (2) nelygybę galima įrodyti ir nesinaudojant eilutėmis. Suprantama, įrodymas tampa šiek tiek ilgesnis, bet esmė nepakinta.

Pradėkime nuo paprasčiausios nelygybės ($x > 0$) :

$$0 < \mathrm{e}^{-x} < 1. \tag{3}$$

Suintegruokime ją nuo 0 iki x :

$$0 < \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t < \int_0^x 1\,\mathrm{d}t,$$

$$0 < -\mathrm{e}^{-x} + 1 < x. \tag{4}$$

Suintegravę šią nelygybę, turime

$$0 < \mathrm{e}^{-x} - 1 + x < \frac{x^2}{2!}.$$

Kartodami integravimą, paeiliui gauname

$$0 < -\mathrm{e}^{-x} + 1 - x + \frac{x^2}{2!} < \frac{x^3}{3!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$0 < -\mathrm{e}^{-x} + 1 - x + \cdots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} < \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$0 < \mathrm{e}^{-x} - 1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} < \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{5}$$

Įstatę čia $x = 1$, gauname (1) formulės atitikmenį:

$$0 < \mathrm{e}^{-1} - 1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!} < \frac{1}{(2n)!}.$$

Ši nelygybė teisinga su visais n, taigi jei $\mathrm{e}^{-1} = \frac{m}{n}$, tai galima ją imti būtent su pastaruoju n. Pakeitę e^{-1} į $\frac{m}{n}$ ir padauginę iš $(2n-1)!$, gauname tą pačią (2) nelygybę. Jos prieštaringumas reiškia, kad e – iracionalusis skaičius.

O ką gi reikia žinoti suprasti šiam įrodymui? Reikia mokėti integruoti rodiklinę funkciją e^{-x} bei laipsninę funkciją x^n taikant Niutono–Leibnico formulę, žinoti, kad nelygybes galima integruoti.

O ar galima apsieiti be integravimo? Pasirodo, taip (žr. [1]).

Grįžkime prie mūsų nelygybių. Integruodami mes jau mokame įrodyti, kad iš (3) nelygybės išplaukia (4). Bet tai puikiausiai galima padaryti vien remiantis išvestine.

Reikia įrodyti (4) nelygybę. Kairioji nelygybė – tai tiesiog kitaip parašyta (3) nelygybės dešinė pusė, taigi įrodyti reikia tik dešiniąją. Perrašykime ją taip:

$$\mathrm{e}^{-x} - 1 + x > 0. \tag{6}$$

Kairės pusės funkcija didėja, nes

$$(\mathrm{e}^{-x} - 1 + x)' = -\mathrm{e}^{-x} + 1 > 0$$

remiantis (3) nelygybe (žinoma, viskas aišku ir be jos). Kadangi funkcija $\mathrm{e}^{-x} - 1 + x$ taške 0 lygi 0, tai teigiamiems x nelygybė (6) įrodyta. Įsitikinome, kad iš (3) nelygybės išplaukia (4) nelygybė. Kitaip sakant, jeigu teisinga (3) nelygybė, tai teisinga ir (4) nelygybė, sudaryta iš visų trijų nelygybės narių pirmykščių funkcijų, lygių 0 taške 0.

Kadangi iš pirmykščių sudarytų nelygybių reikės ir toliau, tai suformuluokime ir įrodykime tokį teiginį.

LEMA. *Tegu $F(x)$ ir $G(x)$ atitinkamai yra funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ pirmykštės, įgyjančios reikšmę* 0 *taške nulis: $F(0) = 0,\ G(0) = 0$. Jeigu su $x \geqslant 0$ $f(x) \geqslant g(x)$, tai $F(x) \geqslant G(x)$.*

Įrodymas. Funkcija $F(x) - G(x)$ didėja, kai $x \geqslant 0$, nes jos išvestinė $F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) \geqslant 0$. Kadangi $F(0) - G(0) = 0$, tai turime $F(x) - G(x) \geqslant 0$, kai $x \geqslant 0$. Lemos įrodymas baigtas.

Grįžkime prie (3), (4) ir tolimesnių nelygybių. Kadangi jos visos, pradedant (4), sudarytos iš ankstesnės nelygybės pirmykščių, tai remiantis lema visos jos teisingos. Vadinasi, turime e iracionalumo įrodymą, kuris remiasi išvestinėmis ir pirmykštės funkcijos sąvoka.

Dabar galime ir papokštauti. Gal jums nepatinka pirmykštės („tai tas pats integralas“)? Ką gi, prašau, apsieisime ir be jų.

Įrodykime nelygybę (5) matematinės indukcijos metodu. Kai $n = 1$, ji virsta

$$0 < \mathrm{e}^{-x} - 1 + x < \frac{x^2}{2!}. \tag{7}$$

Kairioji nelygybė teisinga, nes funkcija $\mathrm{e}^{-x} - 1 + x$ didėja (išvestinė $-\mathrm{e}^{-x} + 1 > 0$), o nulyje lygi 0. Dešinioji nelygybė taip pat teisinga, nes funkcija $-\mathrm{e}^{-x} + 1 - x + \frac{x^2}{2!}$ teigiama (nulyje ji lygi 0 ir didėja, nes jos išvestinė $\mathrm{e}^{-x} - 1 + x$, kaip jau įsitikinome, yra teigiama). Nelygybė (7) įrodyta.

Tarkime, kad (5) teisinga su n. Įrodysime, kad ji teisinga su $n + 1$:

$$0 < \mathrm{e}^{-x} - 1 + x - \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} < \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Vėl kairioji nelygybė teisinga, nes funkcija $\mathrm{e}^{-x} - 1 + x - \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ didėja (jos išvestinė $-\mathrm{e}^{-x} + 1 - \ldots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ teigiama pagal prielaidą (5)), o nulyje lygi 0. Dešinioji nelygybė taip pat teisinga, nes funkcija $-\mathrm{e}^{-x} + 1 - \ldots - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ teigiama (nulyje ji lygi 0 ir didėja, nes jos išvestinė $\mathrm{e}^{-x} - 1 + x - \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0$ – tai jau ką tik įrodėme). Žodžio „pirmykštė“ ir neprireikė!

Skaičiaus π iracionalumo įrodymai

Jeigu mokyklinis e iracionalumo įrodymas (t.y. įrodymas be eilučių ir integralų) žinomas jau senokai, tai mokykliškai įrodyti skaičiaus π iracionalumą pavyko tik šiemet.

Ir vėl iš pradžių pateiksime „studentišką" įrodymą – jame žymiai mažiau žodžių (beje, ir šis įrodymas „šviežias", žr. [2]).

Sinuso Teiloro skleidinį dauginkime iš x,

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \cdots,$$

ir integruokime:

$$\int_0^x t \sin t \,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(t^2 - \frac{t^4}{3!} + \frac{t^6}{5!} - \ldots\right) \mathrm{d}t.$$

Kadangi

$$\int_0^x t \sin t \,\mathrm{d}t = -\int_0^x t \,\mathrm{d}\cos t = -t \cos t\Big|_0^x + \int_0^x \cos t \,\mathrm{d}t = \sin x - x \cos x,$$

tai

$$\sin x - x \cos x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5 \cdot 3!} + \frac{x^7}{7 \cdot 5!} - \ldots.$$

Šią lygybę vėl dauginame iš x ir integruojame,

$$\int_0^x \Big(t \sin t - t^2 \cos t\Big) \mathrm{d}t = \int_0^x \Big(\frac{t^4}{3} - \frac{t^6}{5 \cdot 3!} + \frac{t^8}{7 \cdot 5!} - \ldots\Big) \mathrm{d}t.$$

Pirmas dėmuo jau suintegruotas, tad integruojame antrą:

$$-\int_0^x t^2 \cos t \,\mathrm{d}t = -\int_0^x t^2 \,\mathrm{d}\sin t = -t^2 \sin t\Big|_0^x + 2\int_0^x t \sin t \,\mathrm{d}t.$$

Vadinasi,

$$-x^2 \sin x + 3 \sin x - 3x \cos x = \frac{x^5}{5 \cdot 3} - \frac{x^7}{7 \cdot 5 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 7 \cdot 5!} - \cdots.$$

Dabar jau aišku, kad daugindami iš x ir integruodami po n žingsnių gausime lygybę

$$P(x) \sin x + Q(x) \cos x = \frac{x^{2n+1} \cdot 1!!}{(2n+1)!! \cdot 1!} - \frac{x^{2n+3} \cdot 3!!}{(2n+3)!! \cdot 3!} + \frac{x^{2n+5} \cdot 5!!}{(2n+5)!! \cdot 5!} - \cdots, \quad (8)$$

kur $(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)(2k+1)$, $P(x)$ ir $Q(x)$ – tam tikri (ne aukštesnio laipsnio kaip n) daugianariai su sveikaisiais koeficientais. Būtent ši lygybė yra π iracionalumo raktas (panašiai kaip (1) lygybė „atrakino" e iracionalumą).

Tarkime, kad π racionalus. Tada $\pi = \frac{p}{q}$, kur natūralieji p ir q neturi bendrų daliklių, $\pi = \frac{2p}{2q} = \frac{m}{2q}$, $\cos 2q\pi = \cos m = 1$, $\sin m = 0$. Įstatę į (8) lygybę $x = m$, $\cos m = 1$ ir $\sin m = 0$, gauname

$$Q(m) = \frac{m^{2n+1} \cdot 1!!}{(2n+1)!! \cdot 1!} - \frac{m^{2n+3} \cdot 3!!}{(2n+3)!! \cdot 3!} + \frac{m^{2n+5} \cdot 5!!}{(2n+3)!! \cdot 5!} - \cdots .$$

Primename, kad m – fiksuotas skaičius, o n galima rinktis laisvai. Kai n pakankamai didelis, dešinės pusės eilutė tampa Leibnico eilute, todėl viską lemia pirmas jos narys:

$$0 < Q(m) < \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Bet dešinė pusė yra konverguojančios eilutės (galima remtis Dalambero požymiu)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{2k+1}}{(2k+1)!!}$$

n-tasis narys, todėl artėja į 0. Vadinasi, sveikasis skaičius $Q(m)$ (daugianario su sveikaisiais koeficientais reikšmė sveikajame taške) su dideliais n atsiduria tarp 0 ir 1. Prieštara reiškia, kad prielaida apie π racionalumą neteisinga. Vadinasi, π yra iracionalus skaičius.

Pereikime prie „mokyklinio“ įrodymo. Iš pradžių atsikratome eilučių. Kadangi $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, tai imdami pirmykštes turime ($x > 0$)

$$-x \leqslant \sin x \leqslant x, \quad -\frac{x^2}{2} \leqslant -\cos x + 1 \leqslant \frac{x^2}{2}, \quad -\frac{x^3}{6} \leqslant -\sin x + x \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

Mums užteks net silpnesnės už paskutinę nelygybės

$$x - \frac{x^3}{3} \leqslant \sin x \leqslant x + \frac{x^3}{3}.$$

Ji mums pakeis Teiloro eilutę, o šiaip darome tą patį: dauginame iš x ir imame pirmykštes, kurias skaičiuoti paprasta. Kaip funcijos x^n pirmykštė „siūlosi“ x^{n+1}, bet $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$, todėl x^n pirmykštė yra $x^{n+1}/(n+1)$. Panašiai į $x^n \sin x$ pirmykštes siūlosi $x^n \cos x$. Kadangi $(x^n \cos x)' = -x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x$, tai $x^n \sin x$ pirmykštė bus $-x^n \cos x$ plius funkcijos $nx^{n-1} \cos x$ pirmykštė. Kitaip sakant, žinodami funkcijų su žemesniais n laipsniais ($x^{n-1} \sin x$ ir $x^{n-1} \cos x$) pirmykštes, nesunkiai randame $x^n \sin x$ ir $x^n \cos x$ pirmykštes. Beje, mums jų ir skaičiuoti nereikia – užtenka, kad nelygybėse turėsime pavidalo $P(x) \sin x + Q(x) \cos x$ reiškinius. Šįkart prieiname nelygybę

$$\frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!!} - \frac{m^{2n+3}}{(2n+3)!!} \leqslant Q(m) \leqslant \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!!} + \frac{m^{2n+3}}{(2n+3)!!}.$$

Bet imant $n > m^2$ bus $\frac{m^2}{2n+3} < 1$, todėl

$$0 < Q(m) < 2\frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Kadangi

$$\begin{aligned}(2n+1)!!^2 &= (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1))^2 \\ &= (1\cdot(2n+1))(3\cdot(2n-1))\cdots((2n+1)\cdot 1) > (2n+1)^{n+1} > (2n+1)^{\frac{2n+1}{2}},\end{aligned}$$

tai $(2n+1)!! > (2n+1)^{(2n+1)/4}$, ir imdami n dar didesnį, $n > m^4$, gauname

$$\frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)^{(2n+1)/4}} < \left(\frac{m^4}{2m^4+1}\right)^{(2n+1)/4} < 1.$$

Vadinasi, $0 < Q(m) < 1$, ir sveikasis skaičius atsidūrė tarp 0 ir 1, – prieštara. Įrodymas baigtas.

Literatūra

1. J.Mačys. On irrationality of values of analytical functions. *Matematika ir matematinis modeliavimas*, Technologija, Kaunas, 9–14, 2005.
2. J. Mačys. On some irrationalities. *Lith. Math. J.*, 48(4):401–404, 2008.
3. I. Niven. *Irrational numbers*. Mathematical Association of America, 1956.

SUMMARY

J.J. Mačys. A new method for proving irrationality

A new school-elementary method is proposed for proving the irrationality of numbers e and π.

Keywords: number e, number π, irrationality, elementary methods.