Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 328–333

Bimatricinio lošimo modelis investiciniam portfeliui sudaryti

Sigutė VAKRINIENĖ[1], Gintautas MISEVIČIUS[2]
[1] Vilniaus Gedimino technikos universitetas
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
[2] Vilniaus universitetas
Universiteto g. 3, LT-01513 Vilnius
el. paštas: sigute@micro.lt; gintautas.misevicius@mif.vu.lt

Santrauka. Darbe siūlomas Nešo pusiausvyros bimatriciniame lošime modelis investiciniams portfeliams sudaryti. Portfelio komponentės surandamos sprendžiant dalinai sveikaskaitį tiesinio programavimo uždavinį. Eksperimentinėje dalyje šio modelio pagalba gauti neefektyvūs portfeliai testuojami remiantis keleto Europos šalių akcijų biržų indeksų statistiniais duomenimis. Pasiūlytųjų portfelių realizacijų skaitinės charakteristikos lyginamos su efektyviųjų (Pareto optimalių) portfelių realizacijų skaitinėmis charakteristikomis.

Raktiniai žodžiai: investicinis portfelis, bimatricinis lošimas, Nešo pusiausvyra.

1. Įvadas

Efektyviųjų (Markowitz [1]) portfelių komponentės surandamos sprendžiant netiesinius optimizavimo uždavinius, nes šiuose modeliuose portfelio rizikingumui apibrėžti naudojama dispersija. Maksimizuojant laukiamą vidutinę portfelio grąžą, dispersija fiksuojama, arba minimizuojant dispersiją fiksuojama vidutinė grąža. Netiesinio programavimo uždavinių sprendimas yra susijęs su sunkumais, kai nežinomųjų (portfelio komponenčių) skaičius yra didelis.

Skirtingų autorių publikacijose yra pasiūlyta įvairių tiesinių rizikos matavimo metodų. Papahristodoulou ir Dotzauer [2] aprašytuose tiesiniuose modeliuose optimaliam portfeliui gauti rizika matuojama naudojant absoliutųjį nuokrypį. Optimalios investavimo strategijos suradimo problema straipsnyje [3] modeliuojama naudojant matricinį lošimą ir parametrinį programavimą, kas taip pat leidžia apsiriboti tiesinio optimizavimo modeliais.

Straipsnyje [4] investiciniams portfeliams parinkti siūlomas maksimino principas. Portfelio komponentės surandamos sprendžiant tiesinio programavimo uždavinį viename modelyje ir netiesinio programavimo uždavinį kitame, įvedus rizikos vertinimo koeficientus.

Paprastai mažai rizikingi investiciniai portfeliai duoda mažesnes grąžas, o didesnių pelno normų siekiantys portfeliai turi didesnę riziką, didesnę grąžos dispersiją. Investuotojas turėtų išlaikyti tam tikrą pusiausvyrą tarp portfelio pelningumo ir rizikingumo. Todėl šiame darbe buvo pabandyta investicinio portfelio sudarymo problemos matematiniu modeliu pasirinkti bimatricinį lošimą ir portfelio komponentes gauti iš Nešo pusiausvyros strategijų komponenčių.

2. Matematiniai modeliai

Tegul c_{ij} yra j-ojo indekso kaina i-ąją dieną. Eksperimentinėje dalyje buvo pasirinkta paskutinė (uždarymo) kaina.

Pelno norma j-ąjam indeksui i-tąją dieną skaičiuojama pagal formulę

$$a_{ij} = \left(\frac{c_{ij}}{c_{i-kj}} - 1\right) \cdot 100\%. \quad \text{Eksperimentinėje dalyje } k = 1.$$

Pasirinktam indeksų portfeliui $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$, $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ sumas $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ vadinsime portfelio P i-osios dienos grąžos reikšmėmis (čia a_{ij} yra pelno normos m dienų laikotarpio, kurio duomenis naudojame konstruodami portfelį). Šio portfelio grąžos realizacijomis sekančiame k dienų laikotarpyje vadinsime sumas $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $i = m+1, m+2, \dots, m+k$.

Portfelio P vidutinė grąža $E(P)$ m dienų laikotarpyje skaičiuojama pagal formulę $E(P) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} x_j$, čia $\overline{a_j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ yra j-ojo indekso pelno normos vidurkis stebėtam m dienų ilgio laikotarpiui. $E(R)$ pažymėkime portfelio grąžos realizacijų vidurkį sekančiam k dienų laikotarpiui. Tada $E(R) = \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j} x_j$, o $\overline{b_j} = \frac{1}{k} \sum_{i=m+1}^{m+k} a_{ij}$ yra j-ojo indekso pelno normos vidurkis sekančiam laikotarpiui.

Jei pelno normos yra priklausomi atsitiktiniai dydžiai, portfelio grąžos dispersija yra $S^2(P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_i x_j$, čia k_{ij} yra i-ojo ir j-ojo indekso pelno normų kovariacja.

Efektyviojo portfelio $P_{ef} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ komponentes surandame spręsdami netiesinio programavimo uždavinį:

$$\max W;$$

$$\alpha \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} x_j - (1-\alpha) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_i x_j} \geqslant W, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \ x_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \dots, n.$$

Čia parametras α yra rizikos svorio koeficientas, įgyjantis reikšmes iš intervalo [0; 1].

Modeliuojame keletą modifikuotų matricinių lošimų (A, B), matricas apibrėždami tokiu būdu:

$$\begin{array}{llll}
A_1 = \|\overline{\overline{a_{ij}}}\|, & B_1 = \|k_{ij}\|, & A_2 = \|\overline{\overline{a_{ij}}}\|, & B_2 = \|s_{ij}\|, \\
A_3 = \|\overline{\overline{a_{ij}}}\|, & B_3 = \|v_{ij}\|, & A_4 = \|m_{ij}\|, & B_4 = \|k_{ij}\|, \\
A_5 = \|m_{ij}\|, & B_5 = \|s_{ij}\|, & A_6 = \|m_{ij}\|, & B_6 = \|v_{ij}\|, \\
A_7 = \|\max a_{ij}\|, & B_7 = \|k_{ij}\|, & A_8 = \|\max a_{ij}\|, & B_8 = \|s_{ij}\|, \\
A_9 = \|\max a_{ij}\|, & B_9 = \|v_{ij}\|. & &
\end{array}$$

Matricos elementą $\overline{\overline{a_{ij}}} = (\overline{a_i} + \overline{a_j})/2$ pavadinkime poriniu vidurkiu, tada m_{ij}, s_{ij}, v_{ij}, $\max a_{ij}$, $\min a_{ij}$, yra porinės medianos, poriniai vidutiniai kvadratiniai nuokrypiai, porinės variacijos, poriniai maksimumai ir poriniai minimumai, o k_{ij} yra i-ojo ir j-ojo indeksų pelno normų kovariacija. Šiuos bimatricinius lošimus vadiname modifikuotais todėl, kad pirmasis lošėjas šiuose mūsų modeliuose siekia išlošį maksimizuoti, o antrasis – minimizuoti (klasikiniame bimatriciniame lošime abu lošėjai siekia savo išlošius maksimizuoti).

Kita bimatricinių lošimų grupė apibrėžiama sekančiu būdu:

$$\begin{array}{llll} A_{10} = \|\max a_{ij}\|, & B_{10} = \|\min a_{ij}\|, & A_{11} = \|\overline{\overline{a_{ij}}}\|, & B_{11} = \|m_{ij}\|, \\ A_{12} = \|\overline{\overline{a_{ij}}}\|, & B_{12} = \|\max a_{ij}\|, & A_{13} = \|m_{ij}\|, & B_{13} = \|\max a_{ij}\|, \\ A_{14} = \|-k_{ij}\|, & B_{14} = \|-s_{ij}\|, & A_{15} = \|-k_{ij}\|, & B_{15} = \|-v_{ij}\|, \\ A_{16} = \|-s_{ij}\|, & B_{16} = \|v_{ij}\|. & & \end{array}$$

Pusiausvyros strategijoms, kurių bendru atveju yra neviena, surasti naudosime straipsnyje [6] pasiūlytą tiesinio programavimo uždavinį su papildomais binariaisiais kintamaisiais. Modifikuoto bimatricinio lošimo atveju pusiausvyros surandamos sprendžiant uždavinį:

$$\begin{aligned} &\max\,(U - V); \\ &0 \leqslant U - \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}\, y_j \leqslant \mu r_i, \quad s_i + x_i \leqslant 1,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ &0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i - V \leqslant \mu s_j, \quad s_j + y_j \leqslant 1,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n, \\ &s_i \in \{0, 1\},\ t_j \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Čia $\mu = \max\{\max a_{ij}, \max b_{ij}\}$.

Tokius uždavinius sprendžia SAS/OR procedūra LP, kuri sveikaskaičiams uždaviniams naudoja šakų ir rėžių metodą.

Bimatricinio lošimo (A_k, B_k) mišriąsias pusiausvyros strategijas pažymėkime $X_k = (\overline{x_{1k}}, \overline{x_{2k}}, \ldots, \overline{x_{nk}})$ ir $Y_k = (\overline{y_{1k}}, \overline{y_{2k}}, \ldots, \overline{y_{nk}})$.

Pusiausvyrinius portfelius $P_{pus} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ galime apibrėžti kaip iškiliuosius darinius: $P_{pus} = (1 - \alpha)X + \alpha Y$, kur rizikos svorio koeficientas α tenkina nelygybes $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Čia

$$X = \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{13} X_i + \sum_{i=11}^{13} Y_i\right), \qquad Y = \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{10} Y_i + \sum_{i=14}^{16} (X_i + Y_i)\right).$$

3. Eksperimentinė dalis

Turimus keleto Europos šalių 2005–2008 metų statistinius duomenis apie biržų indeksų kainas suskaidėme į aštuonis pusmečio ilgio laikotarpius. Dviejų tipų portfelius, efektyviuosius P_{ef} ir pusiausvyrinius P_{pus}, konstravome septynis kartus: pagal kiekvieno (pradedant pirmuoju) pusmečio statistinius duomenis. Kiekvieną portfelį testavome apskaičiuodami jo grąžų realizacijas sekančiame pusmetyje.

Pasirinktos šalys ir atitinkami indeksai:

Prancūzija	FCHI	Šveicarija	SSMI
Italija	CMMG	Austrija	ATX
Olandija	AEX	Belgija	BFX
Vokietija	GDAXI	Rusija	MTMS
Didžioji Britanija	FTSE	Turkija	XU100

Tolygiojo portfelio P_t, kurio visos komponentės lygios, t.y. $x_j = 0.1$, $j = 1, \dots, 10$, vidutinė pelno norma konkrečiam laikotarpiui įvertina visų šių 10 šalių indeksų rinkos būseną šiame laikotarpyje, parodo augimo ir kritimo laikotarpius.

Lygindami sukonstruotų portfelių grąžos realizacijų skaitines charakterstikas, galime matyti, kaip jie valdo neišvengiamą mažesnę arba didesnę riziką krentančioje rinkoje, arba, kaip išnaudoja augančios rinkos privalumus.

1 pav. matome vienuolikos 2 lentelėje pateiktų efektyviųjų portfelių bei vienuolikos 3 lentelėje pateiktų pusiausvyrinių portfelių grąžos reikšmių konstravimo laikotarpyje (pažymėta P) ir grąžos realizacijų sekančiame (testavimo) laikotarpyje (pažymėta R) pagrindines skaitines charakteristikas – vidurkį ir nuokrypį. Simboliais Pt ir Rt pažymėti tolygieji portfeliai.

Krentančioje šio laikotarpio (2006 antras pusmetis – 2007 pirmas pusmetis) rinkoje stebime ryškų pusiausvyrinių portfelių grąžų realizacijų pranašumą lyginant su efektyviųjų portfelių grąžų realizacijomis. Testuojant kituose krentančios rinkos laikotarpiuose beveik visų pusiausvyrinių portfelių grąžų realizacijų skaitinės charakteristikos buvo gautos taip pat geresnės arba neblogesnės už efektyviojo portfelio grąžų reali-

1 lentelė. Tolygiojo portfelio skaitinės charakteristikos pusmečio ilgio laikotarpiams

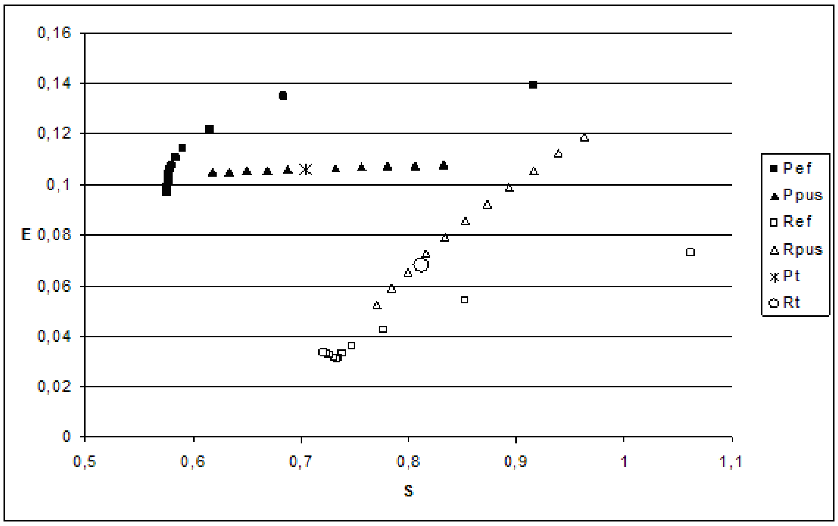
Laikotarpiai	2005 I	2005 II	2006 I	2006 II	2007 I	2007 II	2008 I	2008 II
E	0,077	0,1606	0,0406	0,1058	0,068	−0,0077	−0,1539	−0,1507
S	0,5717	0,6154	1,1071	0,7046	0,8115	1,1323	1,4458	2,1816

2 lentelė. Efektyviųjų portfelių, gautų naudojant 2006 metų pirmo pusmečio statistinius duomenis, koordinatės

α	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0,9	0	0	0	0	0	0	0,282	0,718	0	0
0,8	0	0,3733	0	0	0	0,0705	0,1423	0,4139	0	0
0,7	0	0,5813	0	0	0	0,1351	0,069	0,2146	0	0
0,6	0	0,6812	0	0	0	0,1607	0,0341	0,124	0	0
0,5	0	0,7415	0	0	0	0,1816	0,0113	0,0585	0	0,0071
0,4	0	0,7787	0	0	0	0,1909	0	0,0175	0	0,0129
0,3	0	0,7773	0	0	0,0213	0,187	0	0	0	0,0144
0,2	0	0,7417	0	0	0,0788	0,1665	0	0	0	0,013
0,1	0	0,7151	0	0	0,1223	0,1509	0	0	0	0,0117
0	0	0,6932	0	0	0,1577	0,1384	0	0	0	0,0107

3 lentelė. Pusiausvyrinių portfelių, gautų naudojant 2006 metų pirmo pusmečio statistinius duomenis, koordinatės

α	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1	0,1875	0	0	0,25	0	0	0,25	0	0	0,3125
0,9	0,175	0,0562	0,0063	0,225	0	0,0062	0,225	0,0125	0	0,2938
0,8	0,1625	0,1125	0,0125	0,2	0	0,0125	0,2	0,025	0	0,275
0,7	0,15	0,1687	0,0188	0,175	0	0,0187	0,175	0,0375	0	0,2563
0,6	0,1375	0,225	0,025	0,15	0	0,025	0,15	0,05	0	0,2375
0,5	0,125	0,2812	0,0313	0,125	0	0,0312	0,125	0,0625	0	0,2188
0,4	0,1125	0,3375	0,0375	0,1	0	0,0375	0,1	0,075	0	0,2
0,3	0,1	0,3937	0,0438	0,075	0	0,0437	0,075	0,0875	0	0,1813
0,2	0,0875	0,45	0,05	0,05	0	0,05	0,05	0,1	0	0,1625
0,1	0,075	0,5062	0,0563	0,025	0	0,0562	0,025	0,1125	0	0,1438
0	0,0625	0,5625	0,0625	0	0	0,0625	0	0,125	0	0,125



1 pav. Portfelių grąžų skaitinės harakteristikos 2006 antrą pusmetį – 2007 pirmą pusmetį.

zacijų skaitines charakteristikas. Dviejuose stebėtuose augimo laikotarpiuose ne visi pusiausvyriniai portfeliai turėjo geresnes realizacijų skaitines charakteristikas.

Literatūra

1. H.M. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7:77–91, 1952.
2. C. Papahristodoulou, E. Dotzauer. Optimal portfolios using linear proramming models. *Journal of Operations Research Society*, 55:1169–1177, 2004.
3. S. Vakrinienė, A. Pabedinskaitė. Heuristic analysis of investment atrategy. Kn.: *Ūkio technologinis ir ekonominis vystymas*, XII(1): 62–67, 2006.

4. S. Vakrinienė, G. Misevičius. Tiesinio ir netiesinio optimizavimo modeliai investiciniam portfeliui pasirinkti. *Liet. mat. rink.*, 47(spec. nr.):1–6, 2007.
5. S. Vakrinienė, D. Sudžiūtė. Tiesinio optimizavimo modelis bimatricinio lošimo pusiausvyros situacijoms rasti. *Liet. mat. rink.*, 47(spec.nr.):389–394, 2007.

SUMMARY

S. Vakrinienė, G. Misevičius. Bimatrix game model for the selection of investment portfolio

This research suggests a Nash equilibria model for the selection of investment portfolios. The components of portfolio are found by solving linear programming task with binary variables. In the experimental part of the research ineffective portfolios exerted from this model are tested referring to the statistical data of the stock market indexes of several countries. Realizations of the suggested portfolios are compared to realizations of effective portfolios.

Keywords: investment portfolio, bimatrix game, Nash equilibria.