Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 54–59

О линейном однородном дифференциальном уравнении типа Чебышева

Эдуард КИРЬЯЦКИЙ (VGTU)
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Резюме. В работе рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с аналитическими в круге $|z| < R$ коэффициентами. Назовем уравнение $L[y] = 0$ уравнением типа Чебышева в круге $|z| < R$, если фундаментальная система его решений является системой Чебышева в круге $|z| < R$. В данной работе мы укажем условия, при выполнении которых уравнение $L[y] = 0$ будет типа Чебышева.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, разделенные разности, система Чебышева, аналитическая функция.

Пусть

$$y^{(n)}(z) + g_{n-1}(z)\, y^{(n-1)}(z) + \ldots + g_1(z)\, y^{(1)}(z) + g_0(z)\, y(z) = 0 \tag{1}$$

линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с аналитическими в круге $|z| < R$ коэффициентами. Будем искать решения среди аналитических в круге $|z| < R$ функций. Пусть

$$y_1(z), \ldots, y_n(z) \tag{2}$$

фундаментальная система решений уравнения (1). Известно (см. [1]), что общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$y(z) = c_1 y_1(z) + \ldots + c_n y_n(z),$$

т.е. в виде линейной комбинации функций $y_1(z), \ldots, y_n(z)$.

Назовем (1) уравнением типа Чебышева, если фундаментальная система (2) является системой Чебышева в круге $|z| < R$. Другими словами, уравнение (1) является типа Чебышева (чебышевского типа), если любая аналитическая в круге $|z| < R$ функция $y(z)$, не являющаяся тождественно нулем и удовлетворяющая уравнению (1), имеет в круге $|z| < R$ не более $n - 1$ корней.

Не всякое уравнение (1) будет чебышевского типа. Например, возьмем линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y''(z) - y'(z) = 0 \tag{3}$$

второго порядка и круг $|z| < 7$, содержащий точки $z_1 = 0$, $z_2 = 2\pi$. Функция $y(z) = 1 - e^z$ удовлетворяет уравнению (3) и имеет в круге $|z| < 7$ два корня z_1, z_2. Значит, уравнение (3) не будет чебышевского типа.

В данной работе мы укажем условия, при выполнении которых уравнение (1) будет типа Чебышева. Кроме того, мы докажем вспомогательную теорему, в которой существенную роль играют разделенные разности.

Определим разделенную разность n-го порядка голоморфной в области G функции $F(z)$ формулой (см. [2])

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{F(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0) \dots (\xi - z_n)},$$

где Γ – простой замкнутый контур, лежащий в области G и охватывающий все точки $z_0, \dots, z_n \in G$.

Теорема 1. *Пусть $F(z)$ – голоморфная в круге $|z| < R$ функция имеет n нулей $a_1, \dots, a_n$, которые все расположены в круге $|z| \leqslant R_1 < R$. Пусть также*

$$M_n = \max_{|z| \leqslant R_1} \left| F^{(n)}(z) \right|.$$

Тогда при любом z из круга $|z| \leqslant R_1$ для модуля k-ой производной справедливо неравенство

$$\left| \left((z - a_1) \dots (z - a_m) [F(z); a_1, \dots, a_n, z] \right)^{(k)} \right| \leqslant (|z| + R_1)^{n-k} \frac{A_m^k M_n}{n!}, \qquad (4)$$

где положено $A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$, $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$ и $m \neq 0$.

Доказательство. Обозначим для краткости $\varphi(z) = [F(z); z_1, \dots, z_n, z]$. Для любого z из круга $|z| \leqslant R$ имеем (см. [3])

$$|\varphi(z)| \leqslant \frac{M_n}{n!}. \qquad (5)$$

Возьмем в плоскости uOv прямоугольную трапецию с вершинами в точках $A(1;0)$, $B(n;0)$, $C(n;n)$, $D(1;1)$. Далее, рассматриваем внутри трапеции $ABCD$ и на ее границе множество $(m;k)$ точек с целыми неотрицательными координатами. Нам надо доказать, что для каждой точки $(m;k)$ трапеции $ABCD$ имеет место неравенство (4). Из (5) следует неравенство

$$\left| (z - a_1) \dots (z - a_m) \varphi(z) \right| \leqslant (|z| + R_1)^m \frac{A_m^0 M_n}{n!}, \quad 1 \leqslant m \leqslant n. \qquad (6)$$

Это значит, что для всех точек $(m;0)$, $m = 1, \dots, n$, лежащих на стороне AB трапеции $ABCD$ имеет место неравенство (4). Для точки $(n;n)$ неравенство (4) справедливо, так как

$$\left|\big((z-a_1)\dots(z-a_n)\varphi(z)\big)^{(n)}\right| \leqslant n!\left|\left[F(z)\,;\underbrace{z,\dots,z}_{n+1}\right]\right| \leqslant \frac{A_n^n M_n}{n!}. \qquad (7)$$

Для точек $(m;m)$, $m=1,\dots,n-1$, неравенство (4) справедливо, так как

$$\left|\big((z-a_1)\dots(z-a_m)\varphi(z)\big)^{(m)}\right| = \left|\big(\left[F(z)\,;a_{m+1},\dots a_{n,z}\right]\big)^{(m)}\right|$$

$$= m!\left|\left[F(z)\,;a_{m+1},\dots,a_n,\underbrace{z,\dots z}_{m+1}\right]\right| \leqslant \frac{A_m^m M_n}{n!}. \qquad (8)$$

Из (6), (7), (8) следует, что неравенство (4) справедливо для всех точек, лежащих на сторонах AB, AD, DC трапеции $ABCD$. Теперь мы докажем справедливость неравенства (4) для всех точек, лежащих внутри трапеции $ABCD$, а также для всех точек, расположенных на стороне BC. Будем пользоваться индукцией. Для точек, лежащих на стороне AD неравенство (4) справедливо. Пусть неравенство (4) имеет место для всех точек трапеции $AEFD$, где сторона EF состоит из точек $(m;k)$, $k=0,1,\dots,m-1,m$. Докажем, что неравенство (4) справедливо для всех точек $(m+1;k)$, $k=0,1,\dots,m,m+1$, лежащих на стороне E_1F_1 трапеции AE_1F_1D, содержащей трапецию $AEFD$. Как уже известно, для крайних точек $E_1(m+1;0)$ и $F_1(m+1;m+1)$ стороны E_1F_1 неравенство (4) справедливо. Докажем справедливость неравенства (4) для остальных точек стороны E_1F_1. Возьмем на стороне E_1F_1 произвольным образом внутреннюю точку $(m+1;k)$, где $1\leqslant k\leqslant m$, и докажем справедливость неравенства (4) для этой точки. Имеем

$$\left|\big((z-a_1)\dots(z-a_{m+1})\varphi(z)\big)^{(k)}\right| = \left|\big((z-a_1)\dots(z-a_{m-k+1})(z-a_{m-k+2})\varphi(z)\big)^{(k)}\right|$$

$$= \sum_{p=0}^{k} C_k^p \left|\big((z-a_1)\dots(z-a_{m-k+1})\big)^{(k-p)}\right| \cdot \left|\big((z-a_{m-k+2})\dots(z-a_{m+1})\varphi(z)\big)^{(p)}\right|.$$

Здесь C_k^p – биномиальные коэффициенты. Нетрудно понять, что

$$\left|\big((z-a_1)\dots(z-a_{m-k+1})\big)^{(k-p)}\right| \leqslant A_{m-k+1}^{k-p}\,(|z|+R)^{m-2k+1+p}.$$

Далее, обозначим для удобства $b_1=a_{m-k+2}, b_2=a_{m-k+3},\dots,b_k=a_{m+1}$. Тогда получим

$$\big((z-a_{m-k+2})\dots(z-a_m)\varphi(z)\big)^{(p)} = \big((z-b_1)\dots(z-b_k)\varphi(z)\big)^{(p)}.$$

Так как точка $(k;\,p)$ принадлежит трапеции $AEFD$, то

$$\left|\big((z-b_1)\dots(z-b_k)\varphi(z)\big)^{(p)}\right| (|z|+R_1)^{k-p}\,\frac{A_k^p M_n}{n!}.$$

Таким образом, имеем

$$\left|\left((z-a_1)\dots(z-a_{m+1})\varphi(z)\right)^{(k)}\right|$$
$$\leqslant (|z|+R_1)^{m+1-k}\,\frac{M_n}{n!}\sum_{p=0}^{k} C_k^p\cdot A_{m-k+1}^{k-p}\cdot A_k^p = (|z|+R_1)^{m-k+1}\,\frac{M_n}{n!}A_{m+1}^k.$$

Мы доказали справедливость неравенства (4) для произвольно фиксированной точки $(m+1;k)$, взятой на стороне E_1F_1 трапеции AE_1F_1D. Но тогда мы доказали справедливость неравенства (4) для любой точки, взятой на стороне E_1F_1 трапеции AE_1F_1D. Продолжая указанный процесс, убедимся в справедливости неравенства (4) для любой точки трапеции $ABCD$. Теорема 1 доказана.

В качестве простого следствия из теоремы 1 докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $F(z)$ – голоморфная в круге $|z|<R$ функция имеет n нулей $a_1,\dots,a_n$, которые все расположены в круге $|z|\leqslant R_1<R$. Пусть также*

$$M_n = \max_{|z|\leqslant R_1}\left|F^{(n)}(z)\right|.$$

Тогда при любом z из круга $|z|\leqslant R$ справедливо неравенство

$$\left|F^{(k)}(z)\right|\leqslant\frac{(|z|+R_1)^{n-k}}{(n-k)!}M_n,\quad 0\leqslant k\leqslant n\leqslant -1.$$

Доказательство. Пусть $m=n$ в теореме 1. Тогда легко видеть, что

$$(z-a_1)\dots(z-a_n)\left[F(z);a_1,\dots,a_n,z\right]\equiv F(z),\quad 0\leqslant l\leqslant n-1.$$

Замечание 1. Теорема 2 упоминается в работах [4], [5]. Там рассматривается вещественная n раз дифференцированная на отрезке $[-1;1]$ функция, имеющая n нулей. Доказательство проводится более сложным путем. Установим основную в данной работе теорему.

Теорема 3. *Если для любого z из круга $|z|<R$ имеет место неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(|z|+R)^{n-k}}{(n-k)!}\,|g_k(z)|\leqslant 1, \tag{9}$$

то дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z)+g_{n-1}(z)\,y^{(n-1)}(z)+\dots+g_1(z)\,y^{(1)}(z)+g_0(z)\,y(z)=0 \tag{10}$$

является уравнением типа Чебышева в круге $|z|<R$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (10) не является уравнением типа Чебышева в круге $|z| < R$. Тогда найдется аналитическая в круге $|z| < R$ функция $F_0(z)$, которая удовлетворяет уравнению (10) и имеет n нулей в круге $|z| < R$, т.е. $F_0(a_1) = \ldots = F_0(a_n) = 0$. Возьмем минимального размера замкнутый круг $|z| \leqslant R_1$, который содержит все точки $a_1, \ldots, a_n$. Ясно, что $R_1 < R$. В круге $|z| \leqslant R_1$ функция $|F_0^{(n)}(z)|$ имеет максимум в некоторой точке z_0, т.е.

$$M_n = \max_{|z| \leqslant R_1} \left|F_0^{(n)}(z)\right| = \left|F_0^{(n)}(z_0)\right|.$$

Далее, для любого z из круга $|z| \leqslant R_1$ имеем

$$\left|F_0^{(n)}(z)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} g_k(z) F_0^{(k)}(z)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(z)| \left|F_0^{(k)}(z)\right|$$

$$\leqslant M_n \sum_{k=01}^{n-1} \frac{(|z| + R_1)^{n-k}}{(n-k)!} |g_k(z)| < M_n \sum_{k=01}^{n-1} \frac{(|z| + R)^{n-k}}{(n-k)!} |g_k(z)| \leqslant M_n.$$

В частности, при $z = z_0$ получим $|F_0^{(n)}(z_0)| = M_n < M_n$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему 3.

Следствие 1. Пусть $g(z)$ аналитическая в круге $|z| < R$ функция и $|g_k(z)| \leqslant g(z)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, для любого из круга $|z| < R$. Если в круге $|z| < R$ выполняется неравенство

$$|g(z)| \leqslant \frac{1}{e^{2R} - 1}, \tag{11}$$

то уравнение (1) будет уравнением чебышевского типа в круге $|z| < R$.

Доказательство. В круге $|z| < R$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(|z| + R)^{n-k}}{(n-k)!} |g_k(z) \leqslant| \, |g(z)| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2R)^{n-k}}{(n-k)!} < |g(z)| \left(e^{2R} - 1\right) \leqslant 1$$

и осталось применить теорему 3.

Замечание 2. Если взять $R = 1$ и рассмотреть уравнение

$$y^{(n)}(z) + b_{n-1} y^{(n-1)}(z) + \ldots + b_1 y^{(1)}(z) + b_0 y(z) = 0$$

с числовыми коэффициентами $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$, то условие (11) можно заменить условием $b \leqslant \frac{1}{e^2-1} < \frac{1}{6}$, где $b = \max |b_k|$, $k + 0, 1, \ldots, n-1$.

Литература

1. В.В. Степанов, *Курс дифференциальных уравнений*, Москва (1958).

2. И.И. Ибрагимов, *Методы интерполяции функции и некоторые их применения*, Москва, Наука (1971), 109–115.
3. А.О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, Москва (1967).
4. Г.А. Бессмертных, А.Ю. Левин, О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной, *Доклады Академии Наук СССР*, **144**(3), 471–474 (1962).
5. М. Креин, Д. Милман, *Студиа Матх.*, **9** (1940).

REZIUMĖ

E. Kirjackis. Apie tiesinę homogeninę diferencialinę lygtį Čebyševo tipo

Tegul $L[y]=y^{(n)}(z)+g_{n-1}(z)y^{(n-1)}(z)+\ldots+g_1(z)y^{(1)}(z)+g_0(z)y(z)=0$ yra n-os eilės diferencialinė lygtis su analiziniais skritulyje $|z|<R$ koeficientais. Lygtį $L[y]=0$ vadinsime Čebyševo tipo lygtimi, jeigu fundamentalioji jos sprendinių sistema yra Čebyševo sistema skritulyje $|z|<R$. Darbe nustatomos pakankamos sąlygos, kurioms lygtis $L[y]=0$ yra Čebyševo tipo.

Raktiniai žodžiai: diferencialinės lygtys, padalyti skirtumai, Čebyševo sistema, analizinė funkcija.

SUMMARY

E. Kiriyatzkii. On linear homogeneous differential equation of Chebyshev type

Let $L[y]=y^{(n)}(z)+g_{n-1}(z)y^{(n-1)}(z)+\ldots+g_1(z)y^{(1)}(z)+g_0(z)y(z)=0$ be a differential equation of nth order with analytic in circle $|z|<R$ coefficients. We will call above equation by equation of Chebyshev type in $|z|<R$, if fundamental system of its solution is a Chebyshev system in circle $|z|<R$. In present paper the conditions with the fulfillment of which the equation $L[y]=0$ is of Chebyshev type.

Keywords: differential equations, divided differences, Chebyshev system, analytic function.