Liet. matem. rink, **45***, spec. nr.*, 2005, 97–101

Dviparametrinės tiesinių kompleksų šeimos geometrija

Kazimieras NAVICKIS (VU)
el. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Reziumė. Šiame darbe nagrinėjami trimatės projektyvinės erdvės dviparametrinės tiesinių kompleksų šeimos diferencialinės geometrijos klausimai. Gautos įvairių geometrinių objektų geometrinės interpretacijos.

Raktiniai žodžiai: projektyvinė erdvė, tiesių kompleksas, tiesinis tiesių kompleksas.

Tarkime, kad $\{A_i\}$ – trimatės realiosios projektyvinės erdvės P_3 judamasis reperis, kurio infinitezimalaus judesio diferencialinės lygtys yra tokios ($i, j, \ldots = 1, 2, 3, 4$):

$$dA_i = \omega_i^j A_j.$$

Tiesinio erdvės P_3 tiesių komplekso lygtis:

$$a_{ij} p^{ij} = 0;$$

čia p^{ij} – erdvės P_3 tiesės Pliukerio koordinatės. Tarkime, kad tiesės (A_1A_3), (A_1A_4), (A_2A_3) ir (A_2A_4) priklauso šiam kompleksui. Tada jo lygtis bus tokia:

$$\lambda p^{12} + p^{43} = 0; \tag{1}$$

čia

$$\lambda = \frac{a_{12}}{a_{43}}.$$

Pažymėkime ($p, q, \ldots = 1, 2;\ \alpha, \beta, \ldots = 3, 4$)

$$\Omega_{24} = \lambda\omega_4^1 + \omega_2^3, \quad \Omega_{41} = \lambda\omega_4^2 - \omega_1^3,$$
$$\Omega_{23} = \lambda\omega_3^1 - \omega_2^4, \quad \Omega = \lambda\omega_3^2 + \omega_1^4,$$
$$\omega = d\lambda - \lambda(\omega_p^p - \omega_\alpha^\alpha).$$

(1) komplekso stacionarumo sąlygos

$$\Omega_{23} = 0, \quad \Omega_{24} = 0, \quad \Omega_{41} = 0, \quad \Omega = 0, \quad \omega = 0$$

sudaro visiškai integruojamą sistemą. Diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{pmatrix} \Omega_{23} \\ \Omega_{24} \\ \Omega_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{23} & \mu_{23} \\ \lambda_{24} & \mu_{24} \\ \lambda_{41} & \mu_{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \\ \omega \end{pmatrix} \tag{2}$$

apibrėžia dviparametrinę tiesinių kompleksų šeimą. Dviejų be galo artimų šeimos kompleksų sankirta yra aprašoma lygčių sistema

$$\begin{cases} \lambda p^{12} + p^{43} = 0, \\ \lambda_{2\alpha} p^{2\alpha} - p^{13} + \lambda_{41} p^{41} = 0, \\ \mu_{2\alpha} p^{2\alpha} + p^{12} + \mu_{41} p^{41} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

(3) sistema apibrėžia demikvadriką.

Tarkime, kad $M(x^i)$ yra bet koks erdvės P_3 taškas, o taškas $T(t^i)$ priklauso plokštumai $(A_1A_2A_3)$, t.y. $t^4 = 0$. Tiesė (MT) priklauso (3) demikvadrikai, jei

$$\begin{cases} \lambda x^2 t^1 - \lambda x^1 t^2 - x^4 t^3 = 0, \\ -(x^3 + \lambda_{41} x^4) t^1 + \lambda_{2\alpha} x^\alpha t^2 + (x^1 - \lambda_{23} x^2) t^3 = 0, \\ (x^2 - \mu_{41} x^4) t^1 + (\mu_{2\alpha} x^\alpha - x^1) t^2 - \mu_{23} x^2 t^3 = 0. \end{cases}$$

Ši tiesinių lygčių sistema turi netrivialų sprendinį tada ir tik tada, kada

$$\begin{vmatrix} \lambda x^2 & -\lambda x^1 & -x^4 \\ -x^3 - \lambda_{41} x^4 & \lambda_{2\alpha} x^\alpha & x^1 - \lambda_{23} x^2 \\ x^2 - \mu_{41} x^4 & -x^1 + \mu_{2\alpha} x^\alpha & -\mu_{23} x^2 \end{vmatrix} = 0$$

arba

$$x^4 \cdot f(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0;$$

čia

$$\begin{aligned} f(x^1, x^2, x^3, x^4) &= \lambda \mu_{41} (x^1)^2 + \lambda(\lambda_{41}\mu_{23} - \lambda_{23}\mu_{41} - \mu_{24}) x^1 x^2 \\ &+ \lambda(\lambda_{23}\mu_{24} - \lambda_{24}\mu_{23})(x^2)^2 - x^1 x^3 - \lambda_{41} x^1 x^4 + \lambda_{2\alpha} x^2 x^\alpha + \mu_{23}(x^3)^2 \\ &+ (\mu_{24} + \lambda_{41}\mu_{23} - \lambda_{23}\mu_{41}) x^3 x^4 + (\lambda_{41}\mu_{24} - \lambda_{24}\mu_{41})(x^4)^2. \end{aligned}$$

Vadinasi, tiesė (MT) aprašo trečiosios eilės paviršių, kurį sudaro plokštuma $(A_1A_2A_3)$ ir antrosios eilės paviršius

$$f(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0. \tag{4}$$

Erdvės P_3 reperį $\{A_i\}$ pasirinkime taip, kad būtų patenkintos tokios sąlygos:

$$\begin{cases} \lambda_{23} = 0, \quad \lambda_{24} = 1, \quad \lambda_{41} = 0, \\ \mu_{23} = 0, \quad \mu_{24} = 0, \quad \mu_{41} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Esant (5) fiksacijai, (4) sistema atrodo taip:

$$\Omega_{23} = 0, \quad \Omega_{24} = \Omega, \quad \Omega_{41} = 0. \tag{6}$$

Apibrėžkime 1-formas $\omega_{\alpha\beta}$ ir $\Omega_{\alpha\beta}$ (simetriškas indeksų atžvilgiu) šitaip:

$$\begin{cases} \omega_{33} = -\omega_3^1, \quad \omega_{34} = \omega_3^2 - \omega_4^1, \quad \omega_{44} = -\omega_4^2; \\ \Omega_{33} = \omega_3^4 - \omega_2^1, \quad \Omega_{34} = \omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_4^4, \\ \Omega_{44} = \omega_4^3 - \omega_1^2. \end{cases} \tag{7}$$

Diferencijuodami (6) sistemą išoriniu būdu, gauname:

$$\omega_{\alpha\beta} \wedge \omega + \Omega_{\alpha\beta} \wedge \Omega = 0. \tag{8}$$

Remiantis Kartano lema, iš čia išplaukia, kad

$$\begin{cases} \omega_{33} = \frac{1}{8} b_{33}\omega + \frac{1}{4} a_{33}\Omega, \\ \omega_{34} = \frac{1}{4} b_{34}\omega + \frac{1}{2} a_{34}\Omega, \\ \omega_{44} = \frac{1}{8} b_{44}\omega + \frac{1}{4} a_{44}\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \Omega_{33} = \frac{1}{4} a_{33}\omega + g_{33}\Omega, \\ \Omega_{34} = \frac{1}{2} a_{34}\omega + 2g_{34}\Omega, \\ \Omega_{44} = \frac{1}{4} a_{44}\omega + g_{44}\Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Esant (5) fiksacijai, (4) antros eilės paviršiaus lygtis yra tokia:

$$F \equiv x^1 x^3 - x^2 x^4 = 0. \tag{11}$$

(11) lygtis nagrinėjamu atveju apibrėžia dviparametrinę kvadrikų šeimą. Šios šeimos charakteringieji taškai tenkina sąlygas:

$$\begin{cases} F = 0, \\ \mathrm{d}F = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Pažymėkime

$$\frac{x^1}{x^2} = t, \qquad \frac{x^3}{x^2} = \frac{x^4}{x^1} = s;$$

$$p_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}s^2 + 4g_{\alpha\beta}s - \lambda a_{\alpha\beta},$$

$$q_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}s^2 + 2a_{\alpha\beta}s - \lambda b_{\alpha\beta}.$$

Dabar (12) sistemą galima perrašyti taip:

$$\begin{cases} p_{44}t^2 + 2p_{34}t + p_{33} = 0, \\ q_{44}t^2 + 2q_{34}t + q_{33} = 0. \end{cases}$$

Jei šios dvi lygtys turi vieną bendrą šaknį, tai rezultantas

$$\begin{vmatrix} p_{44} & 2p_{34} & p_{33} & 0 \\ 0 & p_{44} & 2p_{34} & p_{33} \\ q_{44} & 2q_{34} & q_{33} & 0 \\ 0 & q_{44} & 2q_{34} & q_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

(13) lygtis apibrėžia 8 taškus, kuriuose (11) kvadrikų gaubiamasis paviršius liečia šeimos kvadrikas.

Dydžių sistemos

$$\begin{aligned}
&\{g_{\alpha\beta}\},\\
&\{a_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}\},\\
&\{b_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}\},\\
&\{a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}\}
\end{aligned}$$

sudaro geometrinius objektus.

Iš dviparametrinės tiesinių kompleksų šeimos išskirkime vienparametrinę šeimą lygtimi

$$\omega = \mu\Omega.$$

Tokiu atveju (1) komplekso sankirta su jam be galo artimu kompleksu apibrėžia kongruenciją

$$\begin{cases} \lambda p^{12} + p^{43} = 0, \\ \mu p^{12} - p^{13} + p^{42} = 0. \end{cases}$$

Kompleksų pluoštas

$$(\mu + \lambda\varrho)p^{12} - p^{13} + p^{42} + \varrho p^{43} = 0$$

priklauso nuo parametro ϱ. Specialių kompleksų atveju yra patenkinta sąlyga

$$\lambda\varrho^2 + \mu\varrho - 1 = 0.$$

Šios lygties šaknis

$$\varrho_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4\lambda}}{2\lambda}$$

atitinka du specialūs tiesiniai tiesių kompleksai. Jų direktrisėmis yra tiesės

$$\begin{aligned}
l_1 &= \Big(A_1 - \frac{1}{\varrho_1}A_4,\ A_2 - \frac{1}{\varrho_1}A_3\Big),\\
l_2 &= \Big(A_1 + \frac{1}{\varrho_2}A_4,\ A_2 + \frac{1}{\varrho_2}A_3\Big).
\end{aligned}$$

Matome, kad direktrisė l_1 aprašo (11) kvadriką.

Jei $\varrho_1 = \varrho_2$, tai

$$\mu = 2\sqrt{-\lambda}.$$

Tokiu atveju abi direktrisės sutampa su tiese

$$l = \big(A_1 + \sqrt{-\lambda}A_4,\ A_2 + \sqrt{-\lambda}A_3\big).$$

SUMMARY

K. Navickis. Geometry of two-parametric family of linear line complexes

In this article differential geometry of two-parametric family of linear line complexes in the three-dimensional projective space is considered.

Keywords: projective space, line complex, linear line complex.