

Pseudo Herono trikampiai, kurių vienos arba dviejų kraštinių ilgių kvadratai – pirminiai skaičiai

Edmundas Mazėtis^a , Grigorijus Melničenko^b

^a *Matematikos institutas, Vilniaus universitetas*

Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius

^b *Švietimo akademija, Vytauto Didžiojo universitetas*

K. Donelaičio g. 58, LT-44248 Kaunas

El. paštas: edmundas.mazetis@mif.vu.lt; gmelnicenko@gmail.com

Įteiktas 2021 birželio 17; publikuotas 2021 gruodžio 20

Santrauka. Autoriai [4] straipsnyje apibrėžė pseudo Herono trikampio, kurio kraštinių ilgių kvadratai yra sveikieji skaičiai, o dviguba ploto reikšmė – irgi sveikasis skaičius, sąvoką. Šiame darbe nagrinėjamas atskiras tokių trikampių atvejis, kai dviejų jo kraštinių ilgių kvadratai yra $4k + 1$ pavidalo pirminiai skaičiai. Įrodoma, kad bet kuriems dviems duotiesiems pavidalo $4k + 1$ pavidalo pirminiams skaičiams egzistuoja pseudo Herono trikampis, kurio viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose, o dviejų kraštinių ilgių kvadratai lygūs tiems duotiesiems skaičiams. Be to įrodyta, kad tokių trikampių yra baigtinis skaičius. Taip pat įrodoma, kad bet kuriam duotajam pavidalo $4k + 1$ pirminiam skaičiui egzistuoja lygiašoniai pseudo Herono trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškai, jų šoninių kraštinių ilgių kvadratai lygūs duotajam skaičiui, o tokių trikampių yra baigtinis skaičius.

Raktiniai žodžiai: Herono trikampis; pseudo Herono trikampis; pirminiai skaičiai; dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma

AMS: 97F50, 97F60, 97C70

1 Įvadas ir rezultatų formulavimas

Gerai žinoma Ferma teorema teigia, kad kiekvienas pavidalo $4k + 1$ pirminis skaičius p išreiškiamas dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma $p = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$, be to išraiška $p = a^2 + b^2$ yra vienintelė (jei nekreipiame dėmesio į skaičių a ir b sukeitimą vietomis ir jų ženklų kombinacijas). Ferma šį faktą pavadino „fundamentaliąja stačiųjų trikampių teorema“ (“the fundamental theorem on right-angled triangles”)

[2, 107 psl.], [1, 119 psl.], [5]. Iš šios teoremos seka, kad egzistuoja vienintelis statusis trikampis, kurio įžambinės ilgis lygus \sqrt{p} , o statinių ilgiai yra sveikieji skaičiai.

Apibrėšime pseudo Herono trikampių sąvoką, kurios atskiras atvejis yra Herono trikampiai.

1 apibrėžimas. Trikampis, kurio kraštinių ilgių kvadratai yra sveikieji skaičiai, o dviguba ploto reikšmė – irgi sveikasis skaičius, vadinamas pseudo Herono trikampiu.

Pažymėtina, kad mokyklinėje geometrijoje dažnai susiduriama su pseudo Herono trikampiais. Pavyzdžiui, trikampis, kurio kraštinės lygios Herono trikampio pusiau-kraštinėms, arba trikampis, kurio viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškai, yra pseudo Herono trikampiai. Statusis trikampis, kurio statinių ilgiai – sveikieji skaičiai, irgi yra atskiras pseudo Herono trikampio atvejis.

Pagrindinius šio darbo rezultatus išreiškia dvi teoremos:

1 teorema. *Bet kuriems dviem duotiesiems $4k + 1$ pavidalo pirminiams skaičiams egzistuoja lygiai aštuoni pseudo Herono trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose, dviejų kraštinių ilgių kvadratai lygūs tiems duotiesiems skaičiams.*

2 teorema. *Bet kuriam duotajam pavidalo $4k + 1$ pirminiam skaičiui egzistuoja lygiai penki lygiašoniai pseudo Herono trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškai, jų šoninių kraštinių ilgių kvadratai lygūs duotajam skaičiui.*

2 Pagrindinių rezultatų įrodymas

3 teorema [Ferma]. *Bet kuriam duotajam pavidalo $4k + 1$ pirminiam skaičiui p egzistuoja vienintelis statusis pseudo Herono trikampis, kurio įžambinės ilgio kvadratas lygus p , o statinių ilgiai yra sveikieji skaičiai. Tokio trikampio viršūnės gali būti patalpintos gardelės \mathbb{Z}^2 taškuose.*

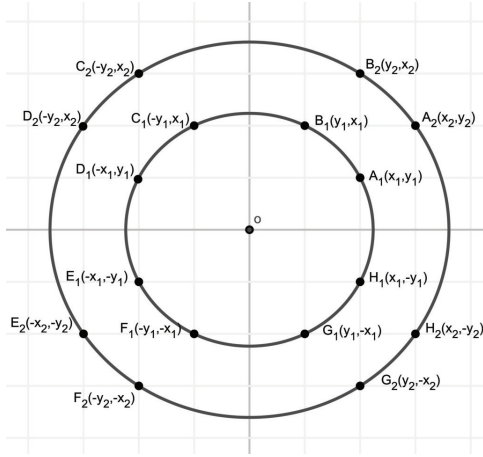
Teoremos įrodymą galima rasti [2] ir [1] darbuose.

Plokštumoje nagrinėkime stačiakampę Dekarto koordinatinių sistemą ir joje sveikaskaitę gardelę \mathbb{Z}^2 .

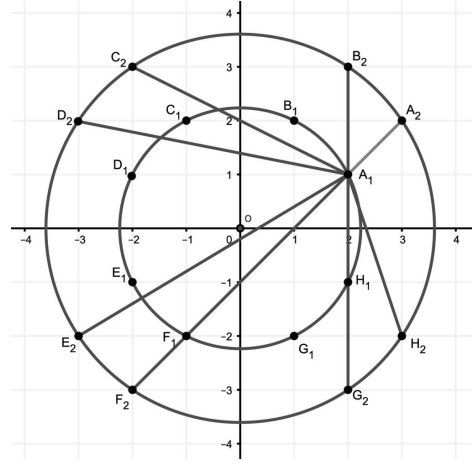
2 apibrėžimas. Sakykime, kad trikampio OAC viršūnės yra sveikaskaitės gardelės \mathbb{Z}^2 taškuose, o taškas O yra koordinatinių sistemos pradžios taškas. Tuomet kraštinę AC vadinsime trikampio OAC pagrindu.

Teoremos 1 įrodymas. Pirmiausia teoremą įrodysime, kai viena trikampio viršūnė yra koordinatinių pradžios taške O . Sakykime, kad p_1 ir p_2 yra du skirtingi pavidalo $4k + 1$ pirminiai skaičiai, tai pagal Ferma teoremą teisingos lygybės $p_1 = x_1^2 + y_1^2$ ir $p_2 = x_2^2 + y_2^2$, čia $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, $x_2 > 0$, $y_2 > 0$ – sveikieji skaičiai. Sakykime, kad $p_1 < p_2$. Sveikaskaitėje gardelėje \mathbb{Z}^2 pažymėkime taškus, kuriuos pavadinkime žemutine grupe (1 pav. atitinka atvejį $p_1 = 5$):

$$A_1(x_1, y_1), B_1(y_1, x_1), C_1(-y_1, x_1), D_1(-x_1, y_1), \\ E_1(-x_1, -y_1), F_1(-y_1, -x_1), G_1(y_1, -x_1), H_1(x_1, -y_1).$$



1 pav.



2 pav.

Pastebėkime, kad

$$\sqrt{p_1} = OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 = OE_1 = OF_1 = OG_1 = OH_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Toje pačioje gardelėje \mathbb{Z}^2 pažymėkime taškus, kuriuos pavadinsime viršutine grupe:

$$A_2(x_2, y_2), B_2(y_2, x_2), C_2(-y_2, x_2), D_2(-x_2, y_2), \\ E_2(-x_2, -y_2), F_2(-y_2, -x_2), G_2(y_2, -x_1), H_1(x_2, -y_2).$$

Akivaizdu, kad toje pačioje gardelėje \mathbb{Z}^2 pažymėkime taškus, kuriuos pavadinsime viršutine grupe:

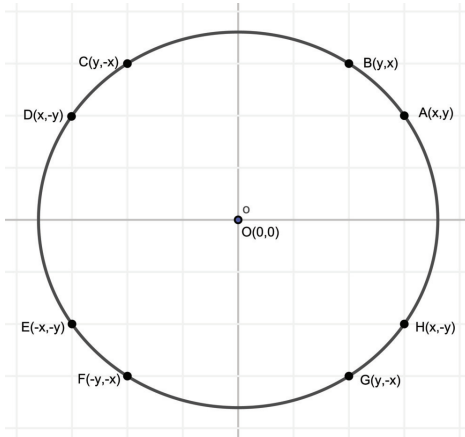
$$\sqrt{p_2} = OA_2 = OB_2 = OC_2 = OD_2 = OE_2 = OF_2 = OG_2 = OH_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Pastebėkime, kad atstumai nuo bet kurio žemutinės grupės taško iki bet kurio viršutinės grupės taško yra lygūs vienam iš šių skaičių.

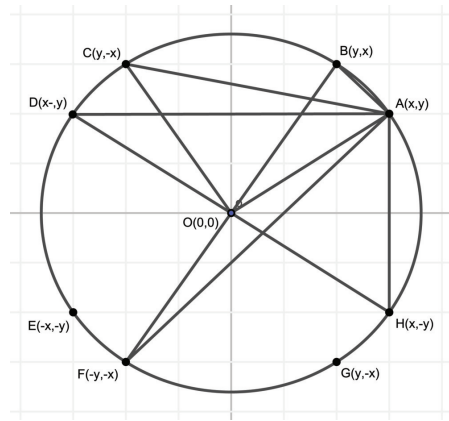
$$\begin{aligned} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2}, \\ \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2x_1x_2 - 2y_1y_2}, \\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 + 2y_1y_2}, \\ \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2}, \\ \sqrt{(x_2 - y_1)^2 + (y_2 - x_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2}, \\ \sqrt{(x_2 + y_1)^2 + (y_2 - x_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_1 - 2x_1y_2}, \\ \sqrt{(x_2 - y_1)^2 + (y_2 + x_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_1 + 2x_1y_2}, \\ \sqrt{(x_2 + y_1)^2 + (y_2 + x_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Nesunkiai patikriname, kad visi šie 8 atstumai yra skirtingi. Iš čia seka, kad jungdami atkarpomis žemutinės grupės taškus su viršutinės grupės taškais, gauname trikampių pagrindus (2 pav. nubrėžti tie pagrindai, kai $p_1 = 5, p_2 = 13$, o visi pagrindai išeina iš taško $A_1(x_1, y_1)$). Iš (1) lygybių gauname, kad visi tie 8 trikampiai yra skirtingi. Taigi gavome 8 skirtingus trikampius, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės \mathbb{Z}^2 taškai, o duotieji pirminiai skaičiai p_1 ir p_2 yra tų trikampių kraštinių ilgių kvadratai. Šie 8 trikampiai yra pseudo Herono trikampiai [4].

Dabar sakykime, kad MNK yra trikampis, kurio viršūnės yra sveikaskaitės gardelės \mathbb{Z}^2 taškuose, $MN = \sqrt{p_1}$, $MK = \sqrt{p_2}$, o viršūnė M nesutampa su koordinatių sistemos pradžios tašku O . Atlikime tiesioginį plokštumos judesį, kuriuo taškai M ir N atvaizduojami atitinkamai į taškus O ir A_1 . Kadangi $MN = OA_1 = \sqrt{p_1}$, tai toks judesys egzistuoja ir yra vienintelis. Sakykime, kad taško K vaizdas yra sveikaskaitės gardelės taškas $L(x, y)$. Kadangi $x^2 + y^2 = p_2$, tai iš Ferma teoremos išplaukia, kad taškas L sutampa su vienu iš viršutinės grupės taškų. \square



3 pav.



4 pav.

Teoremos 2 įrodymas. Iš Ferma teoremos seka, kad bet kuriam pavidalo $4k + 1$ pirminiam skaičiui p teisinga lygybė $p = x^2 + y^2$, čia $x > 0, y > 0$ – sveikieji skaičiai, ir $x > y$. Sveikaskaitėje gardelėje \mathbb{Z}^2 pažymėkime taškus

$$\begin{aligned} &A(x, y), B(y, x), C(-y, x), D(-x, y), \\ &E(-x, -y), F(-y, -x), G(y, -x), H(x, -y). \end{aligned} \tag{2}$$

(3 pav. brėžinys atliktas, kai $p = 13$). Akivaizdu, kad

$$\sqrt{p} = OA = OB = OC = OD = OE = OF = OG = OH = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3}$$

Nesunkiai randame, kad skirtingi atstumai tarp bet kurių dviejų iš taškų (2) yra lygūs vienam iš šių skaičių:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(y-x)^2 + (x-y)^2} &= \sqrt{2}(x-y), \\
\sqrt{(y-x)^2 + (x+y)^2} &= \sqrt{2}(x^2 + y^2), \\
\sqrt{(y+x)^2 + (x+y)^2} &= \sqrt{2}(x+y), \\
\sqrt{(x+x)^2 + (y+y)^2} &= 2\sqrt{(x^2 + y^2)}, \\
\sqrt{(x+x)^2 + (y-y)^2} &= 2x, \\
\sqrt{(x-x)^2 + (y+y)^2} &= 2y.
\end{aligned} \tag{4}$$

Sujungę koordinacių pradžios tašką $O(0,0)$ atkarpomis su taškais (2), gauname lygiašonius trikampius, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės \mathbb{Z}^2 taškai, o jų dviejų šoninių kraštinių kvadratai lygūs duotajam pirminiam skaičiui p . Atstumas, lygus skaičiui $2\sqrt{x^2 + y^2}$, negali būti lygiašonio trikampio pagrindu, nes iš (3) lygybės gauname, kad jo viršūnės yra vienoje tiesėje. Iš (4) lygybių išplaukia, kad yra 5 skirtingi lygiašoniai trikampiai, kurių šoninių kraštinių kvadratai lygūs p , o viršūnės yra gardelės \mathbb{Z}^2 taškai. 4 pav. parodyti tie penki trikampiai, kurių pagrindai, išeina iš gardelės taško $A(x, y)$, kai $p = 13$. Šie 5 trikampiai yra pseudo Herono trikampiai [4].

Analogiški samprotavimai kaip ir 1 teoremos įrodyme leidžia daryti išvadą, kad bet kuris lygiašonis trikampis, kurio viršūnės yra gardelės \mathbb{Z}^2 taškai, o dviejų šoninių kraštinių ilgių lygūs \sqrt{p} , yra lygus vienam iš gautųjų penkių trikampių. \square

Iš 1 teoremos įrodymo neišplaukia, kad pseudo Herono trikampiai, kurių dviejų kraštinių kvadratai yra duotieji pirminiai skaičiai, yra tik tie 8 trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose. Gali būti pseudo Herono trikampių, kurie pasižymi minėtomis savybėmis, bet nėra tokios sveikaskaitės gardelės, kurios taškai būtų tų trikampių viršūnės. Analogiškai iš 2 teoremos įrodymo neišplaukia, kad lygiašonių pseudo Herono trikampių, kurių šoninių kraštinių ilgio kvadratas yra duotasis pirminis skaičius, yra tik 5 trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose, nes gali būti trikampių, tenkinančių šią sąlygą, kurių viršūnės nėra sveikaskaitės gardelės taškuose.

Autoriai [4] darbe įrodė, kad bet kuriam pseudo Herono trikampiui egzistuoja panašus jam trikampis, kurio viršūnės yra gardelės \mathbb{Z}^2 taškuose. Yra žinoma, kad bet kurio Herono trikampio viršūnes galima patalpinti sveikaskaitės gardelės taškuose [3, 6]. Analogiška prielaida pseudo Herono trikampiams (žr. [4] darbo 1 problemą) yra neįrodyta. Jei šios prielaidos teiginys būtų teisingas, tuomet bet kuriems duotiems $4k+1$ pavidalo pirminiams skaičiams p_1 ir p_2 ($p_1 \neq p_2$) egzistuotų tik 8 pseudo Herono trikampiai, kurių dviejų kraštinių ilgių kvadratai būtų lygūs duotiesiems skaičiams. Taip pat bet kuriam $4k+1$ pavidalo pirminiam skaičiui p egzistuotų tik 5 skirtingi lygiašoniai pseudo Herono trikampiai, kurių šoninių kraštinių ilgių kvadratai būtų lygūs tam pirminiam skaičiui.

Literatūra

- [1] H. Davenport. *Vysshaya Arifmetika*. FML, Moscow, 1965 (in Russian).
- [2] H. Davenport. *Higher Arithmetic*. 8th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

- [3] J.S. Marshall, A.R. Perlis. Heronian tetrahedra are lattice tetrahedra. *Amer. Math. Monthly*, **120**(2):140–149, 2013.
- [4] E. Mazetis, G. Melničenko. Trikampio kampų kotangentų racionaliosios reikšmės. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **55**:84–89, 2014.
- [5] D. Vella, A. Vella, J. Wolf. An extension of the fundamental theorem on rightangled triangles. *Math. Gazette*, **89**:237–244, 2005.
- [6] P. Yiu. Heronian triangles are lattice triangles. *Amer. Math. Monthly*, **108**(3):261–263, 2001.

SUMMARY

Pseudo-Heronian triangles whose squares of the lengths of one or two sides are prime numbers

E. Mazetis, G. Melnichenko

The authors introduced the concept of a pseudo-Heron triangle, such that squares of sides are integers, and the area is an integer multiplied by 2. The article investigates the case of pseudo-Heron triangles such that the squares of the two sides of the pseudo-Heron triangle are primes of the form $4k + 1$. It is proved that for any two predetermined prime numbers of the form $4k + 1$ there exist pseudo-Heron triangles with vertices on an integer lattice, such that these two primes are the sides of these triangles and such triangles have a finite number. It is also proved that for any predetermined prime number of the form $4k + 1$, there are isosceles triangles with vertices on an integer lattice, such that this prime is equal to the values of two sides and there are only a finite number of such triangles.

Keywords: Heronian triangles; pseudo-Heronian triangles; prime numbers; sum of squares of two numbers