Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 393–399

Obligacijų kainų modeliavimas

Jelena ARTAMONOVA (VU)
el. paštas: abashkina@takas.lt

Reziumė. Šiame darbe pateikiama metodika, leidžianti įvertinti obligacijų rinkos modelių parametrus. Siūlomi metodai iliustruojami nagrinėjant Lietuvos Vyriausybės vertybinius popierius. Rezultatai rodo kad (dvifaktorinis) kvadratinis binominis obligacijų kainų modelis leidžia tiksliau aproksimuoti turimus duomenis nei analogiškas (vienfaktorinis) keturnominis modelis.

1. Įvadas

Obligacijų rinkos modeliavimas yra vienas iš svarbiausių finansų matematikos uždavinių. Gausiame šiai temai skirtų darbų sąraše galima išskirti dvi dideles grupes darbų: diskretaus laiko modeliai ir tolydaus laiko modeliai. Vienas pamatinių diskretaus laiko modelių buvo pasiūlytas Ho ir Lee 1986 metais [8], kurie pasiūlė modeliuoti obligacijų rinką remiantis binominiu medžiu. Ši konstrukcija yra analogiška gerai žinomam akcijų rinkos Cox, Ross ir Rubinstein binominiam modeliui [4], kuriame laikoma jog akcijos kaina iš esamos būsenos sekančiu laiko momentu gali patekti tik į dvi būsenas, t.y. pakilti arba nukristi. Ho ir Lee [8], remdamiesi arbitražo metodologija, pasiūlė obligacijų kainas aprašyti pradinės būsimosios normos (angl. forward rate) kreivės, veikiamos tam tikros perturbacijų funkcijos, pagalba.

Tam, kad tiksliau aprašyti Ho–Lee modelį, tarkime, kad kiekvienam išpirkimo momentui $N = 0, 1 \ldots$ egzistuoja nulinio kupono obligacija, kurios kaina momentu n yra $P(n, N) > 0$ $(n = 0, \ldots, N)$. Tarkime, kad išpirkimo momentu N išmokamas 1 piniginis vienetas, t.y. su kiekvienu N teisinga lygybė $P(N, N) = 1$. Obligacijų kainų dinamika Ho–Lee modelyje aprašoma lygtimis

$$P_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(n, N) = \frac{P_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}}(n-1, N)}{P_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}}(n-1, n)}\, h(\varepsilon_n; n, N), \qquad P(0, N) > 0;$$

čia $n = 1, \ldots, N$, $N \geqslant 1$, ε_n yra atsitiktiniai dydžiai įgyjantys reikšmes -1 ir $+1$, o $h(\cdot; n, N) : \{-1; 1\} \to (0, \infty)$ yra tokios teigiamos „perturbacijų“ funkcijos, kad visiems $N = 1, 2, \ldots$ galioja lygybė $h(\cdot; N, N) = 1$ ir $h(-1; n, N) < h(1; n, N)$. Taikydami nearbitražinės rinkos prielaidą ir laikydami, kad binominis medis yra susirišantis, Ho ir Lee parodė kad homogeniniu atveju, t.y. kuomet $h(\cdot; n, N) = h(\cdot; N-n)$, egzistuoja toks skaičius $\alpha \in (0, 1)$, kuriam

$$h(-1; N-n) = \frac{\Delta^{N-n}}{\alpha+(1-\alpha)\Delta^{N-n}}, \quad h(1; N-n) = \frac{1}{\alpha+(1-\alpha)\Delta^{N-n}};$$

čia

$$\Delta = \frac{h(-1;1)}{h(1;1)} = \frac{\alpha h(-1;1)}{1-(1-\alpha)h(-1;1)}.$$

Įvairūs Ho–Lee binominio modelio apibendrinimai buvo nagrinėjami Hull [9], Bliss ir Ronn [3], Artamonovos ir Leipaus [1], [2] (vienfaktorinis atvejis); Heath ir kt. [6], [7], Dybvig [5], Leipaus [10] (daugiafaktorinis atvejis) ir kituose darbuose.

Šio darbo tikslas – pateikti metodiką, leidžiančią, turint realius duomenis, įvertinti atitinkamų modelių parametrus ir palyginti šių modelių tikslumą keturnominiui ir kvadratiniui binominiui medžiams, kurie yra lygintini vienfaktorinio ir dvifaktorinio modelių variantai. Iliustracijai nagrinėjami Lietuvos Vyriausybės vertybiniai popieriai 1992–1997 metų laikotarpiu, su išpirkimo data 2008 metais. Rezultatai rodo kad (dvifaktorinis) kvadratinis binominis obligacijų kainų modelis leidžia tiksliau aproksimuoti turimus duomenis nei (vienfaktorinis) keturnominis modelis.

2. Obligacijų rinkos modelių vertinimas

2.1. Multinominis obligacijų kainų modelis

Binominio Ho–Lee modelio, aprašančio obligacijos su išpirkimo data N kainą momentu n, apibendrinimą į k-nominį bearbitražės rinkos modelį galima užrašyti taip [2]:

$$P(n,N) = P(0,N)\prod_{i=1}^{n} X_i(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{i-1})\prod_{j=1}^{n} h(\varepsilon_j; N-j), \qquad n = 1,2,\ldots,N, \tag{2.1}$$

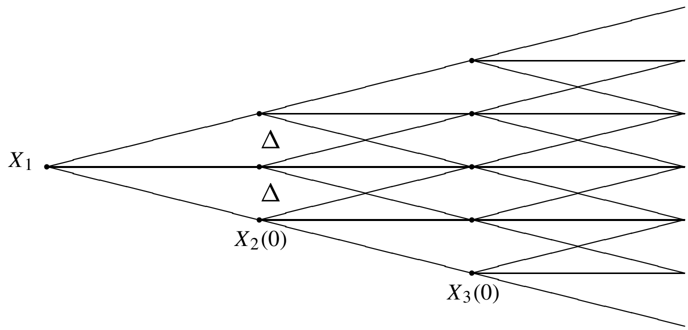
čia $P(0,N)$ – pradinė obligacijos kaina, ε_j $(j = 1,2,\ldots,N)$ įgyja reikšmes iš aibės $\{0,1,\ldots,k-1\}$, o dydžiai $X_i(\cdot)$ ir $h(\cdot;\cdot)$ nusakyti lygybėmis

$$X_i(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{i-1}) = X_i(0)\Delta^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{i-1}}, \quad (i \geqslant 2); \quad X_1 > 0,$$

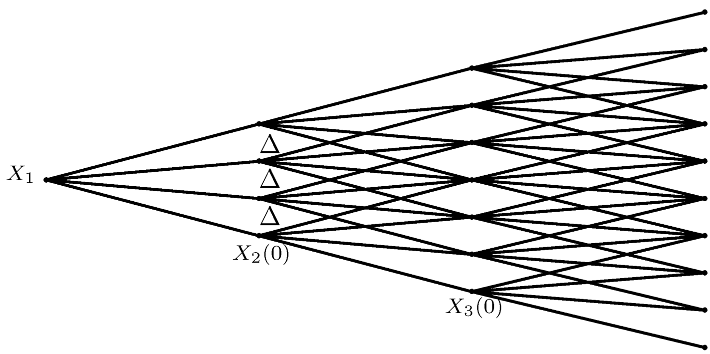
$$h(r;j) = \frac{\Delta^{-rj}}{\alpha_0+\alpha_1\Delta^{-j}+\ldots+\alpha_{k-1}\Delta^{-(k-1)j}}.$$

Tam kad nusakytume šį modelį, 1) parinksime dydžius $X_i(0), i = 2,\ldots,N$ (X_1 bus parenkamas iš duomenų); 2) įvertinsime parametrus $\Delta, \alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1} \in (0,1)$ (α_0 randamas iš $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{k-1} = 1$) bei dydžius $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$. Pirmąjį žingsnį atliksime papildomai reikalaudami, kad egzistuotų tokia medžio šaka, kuriai palūkanų $X_i(\cdot)$ reikšmė būtų pastovi. Pavyzdžiui, trinominio modelio atveju ($k = 3$) turi būti išpildyta $X_1 = X_2(1) = X_3(2) = \ldots$, keturnominio modelio atveju, $X_1 = X_3(3) = X_5(5) = \ldots$ ir pan. (žr. 1 ir 2 pav.). Bendru atveju, šis reikalavimas nusakomas lygybe

$$X_i(0) = \begin{cases} \Delta^{-(k-1)(i-1)}X_1, & \text{jei } k - \text{nelyginis}, \\ \Delta^{-\frac{(k-1)}{2}(i-1)}X_1, & \text{jei } k - \text{lyginis}. \end{cases} \tag{2.2}$$



1 pav. Trinominis medis.



2 pav. Keturnominis medis.

Antrajame žingsnyje vertinsime parametrus $\Delta, \alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$, bei dydžius $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, kurie nusakys tikslią laužtę, aproksimuojančią stebimas obligacijų su išpirkimo data N kainas $p_1, \dots, p_n$ momentais $1, \dots, n$, atitinkamai. Tam tikslui naudosime mažiausių kvadratų metodą, t.y. minimizuosime

$$L(\Delta; \alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \sum_{i=1}^{n} \bigl(p_i - P(i, N)\bigr)^2$$

pagal $\Delta, \alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$ ir $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ su apribojimais

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = 1, \quad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \;\; i = 0, \dots, k-1,$$

$$0 < \Delta < 1,$$

$$\varepsilon_j \in \{0, \dots, k-1\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Pastarąjį uždavinį galima gana greitai išspręsti Excel programa, naudojant Solver funkciją iš Tools meniu.

2.2. *Kvadratinis binominis obligacijų kainų modelis*

Kvadratinis binominis obligacijų kainų modelis yra dvifaktorinis Ho–Lee binominio modelio apibendrinimas. Remiantis šiuo modeliu, obligacijos su išpirkimo data N kaina momentu n užrašoma taip [2]:

$$P(n,N) = P(0,N)\prod_{i=1}^{n} X_i\big((\varepsilon_{11},\varepsilon_{21})+\ldots+(\varepsilon_{1,i-1},\varepsilon_{2,i-1})\big)\prod_{j=1}^{n} h\big((\varepsilon_{1j},\varepsilon_{2j});N-j\big),$$

čia $\varepsilon_{uj}=0,1$ ir

$$X_i\big((\varepsilon_{11},\varepsilon_{21})+\ldots+(\varepsilon_{1,i-1},\varepsilon_{2,i-1})\big) = X_i((0,0))\Delta_1^{\varepsilon_{11}+\ldots+\varepsilon_{1,i-1}}\Delta_2^{\varepsilon_{21}+\ldots+\varepsilon_{2,i-1}},$$

$$h\big((r,s);j\big) = \frac{\Delta_1^{-rj}\Delta_2^{-sj}}{\alpha_{00}+\alpha_{10}\Delta_1^{-j}+\alpha_{01}\Delta_2^{-j}+\alpha_{11}(\Delta_1\Delta_2)^{-j}}.$$

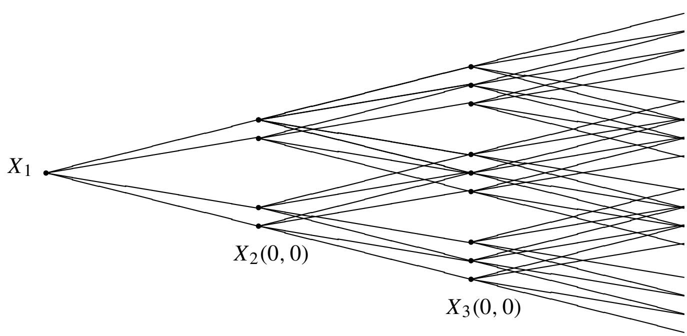
Geometrinis šio modelio vaizdas pateiktas 3 pav.

Tam, kad palygintume šį modelį su atitinkamu keturnominiu modeliu, pirmajame žingsnyje taip parinksime dydžius $X_2((0,0)),\ldots,X_N((0,0))$ (X_1 parenkamas iš duomenų), kad jie sutaptų su dydžių $X_2(0),\ldots,X_N(0)$ reikšmėmis. Antrajame žingsnyje įvertinsime parametrus (Δ_1,Δ_2), $\alpha_{00},\alpha_{01},\alpha_{10},\alpha_{11}$ ($\alpha_{00}+\alpha_{01}+\alpha_{10}+\alpha_{11}=1$) bei dydžius $(\varepsilon_{11},\varepsilon_{21}),\ldots,(\varepsilon_{1n},\varepsilon_{2n})$. Vėlgi, naudosime mažiausių kvadratų metodą, t.y. minimizuosime funkciją

$$L\big((\Delta_1,\Delta_2);\alpha_{00},\alpha_{01},\alpha_{10},\alpha_{11};(\varepsilon_{11},\varepsilon_{21}),\ldots,(\varepsilon_{1n},\varepsilon_{2n})\big) = \sum_{i=1}^{n}\big(p_i - P(i,N)\big)^2$$

pagal (Δ_1,Δ_2), $\alpha_{00},\alpha_{01},\alpha_{10},\alpha_{11}$ ir $(\varepsilon_{11},\varepsilon_{21}),\ldots,(\varepsilon_{1n},\varepsilon_{2n})$ su apribojimais

$$\alpha_{00}+\alpha_{10}+\alpha_{01}+\alpha_{11}=1;\quad 0\leqslant\alpha_{uv}\leqslant 1\ \ (u,v=0,1);$$



3 pav. Kvadratinis binominis medis.

$$0 < \Delta_1, \Delta_2 < 1;$$

$$\varepsilon_{uj} = 0; 1 \quad (u = 1, 2, \ j = 1, \dots, n).$$

Kaip ir vienfaktorinio modelio atveju, šį uždavinį spręsime Excel pagalba.

3. VVP kainų modeliavimas

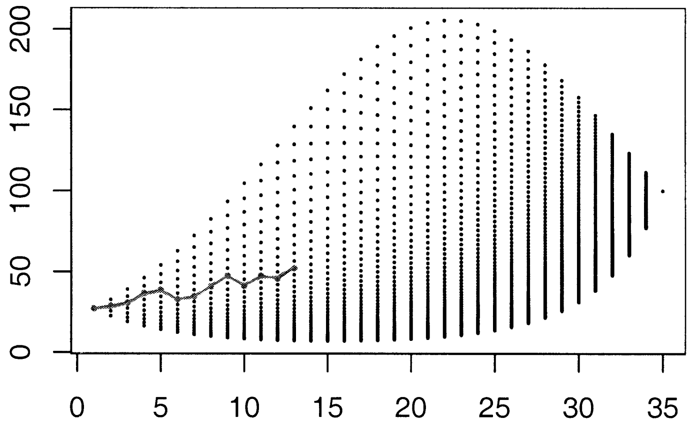
Šiame skyrelyje pateikiami praktiniai rezultatai aukščiau aprašytais metodais modeliuojant Lietuvos Vyriausybės vertybinių popierių kainas. 1 lentelėje pateiktos 100 Lt nominalo VVP su išpirkimo data 2008.11.15 palūkanų normos ir pusmetinės kainos intervale 1992.01.02 iki 1997.12.25.

1 lentelė. Lietuvos VVP duomenys

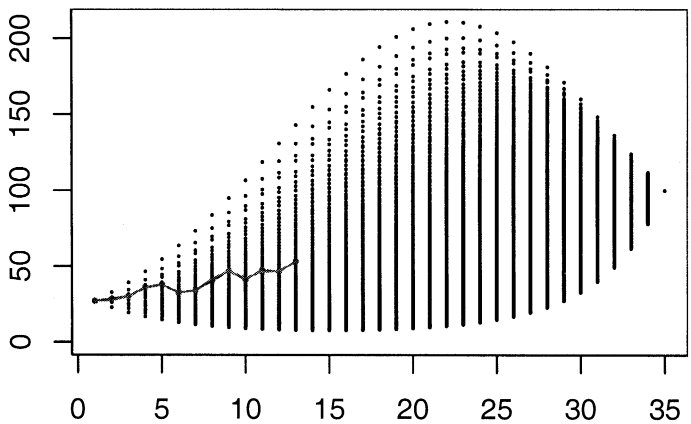
Periodas i	Data	Palūkanų norma (%)	Kaina p_i (Lt)
0	1992.01.02	7.877	27.18
1	1992.07.02	8.057	27.44
2	1992.12.31	7.713	30.08
3	1993.07.01	6.820	35.67
4	1993.12.30	6.680	37.63
5	1994.06.30	7.885	32.90
6	1994.12.29	7.985	33.74
7	1995.06.29	6.675	41.54
8	1995.12.28	5.965	46.90
9	1996.06.27	7.100	42.15
10	1996.12.26	6.595	46.24
11	1997.06.26	6.765	46.88
12	1997.12.25	5.915	53.01

2 lentelė. Įvertinti parametrai

	Δ	α	Paklaida
BM	$\Delta = 0.994$	$\alpha_0 = 0.080$ $\alpha_1 = 0.920$	50.070
TM	$\Delta = 0.995$	$\alpha_0 = 0.263$ $\alpha_1 = 0.020$ $\alpha_2 = 0.717$	13.795
KM	$\Delta = 0.996$	$\alpha_0 = 0.003$ $\alpha_1 = 0.001$ $\alpha_2 = 0.819$ $\alpha_4 = 0.177$	12.533
KBM	$\Delta_1 = 0.996$ $\Delta_2 = 0.993$	$\alpha_{00} = 0.000$ $\alpha_{10} = 0.273$ $\alpha_{01} = 0.394$ $\alpha_{00} = 0.333$	7.032



4 pav. Keturnominis medis.



5 pav. Kvadratinis-binominis medis.

Taigi, šiuo atveju $N = 34$, $P(N, N) = 100$ Lt, o iš lentelės turime $p_1, \ldots, p_{12}$ reikšmes ir $X_1 = 1.08057$. Mūsų tikslas – šiems duomenims įvertinti multinominį ir kvadratinį-binominį medį, kurie (mažiausiu kvadratu prasme) aproksimuotų realias obligacijos kainas $p_1, \ldots, p_{12}$. 2 lentelėje pateiktos įvertintos šuolių Δ, tikimybių α reikšmės bei atitinkamos vidutinės kvadratinės paklaidos binominio (BM), trinominio (TM), keturnominio (KM) ir kvadratinio binominio (KBM) modelių atvejais.

Keturnominis ir kvadratinis binominis medžiai bei įvertintos kainų laužtės pavaizduotos atitinkamai 4 ir 5 pav.

Pastebėsime, kad kvadratinio binominio medžio atveju vidutinė kvadratinė paklaida yra žymiai mažesnė nei trinominio ir keturnominio medžių atveju, tačiau skaičiavimai užima daugiau kompiuterio laiko.

Literatūra

1. J. Artamonova, R. Leipus, Obligacijų rinkos modeliavimas trinominio medžio pagalba, *Liet. matem. rink.*, **44** (spec. nr.), 597–602 (2004a).
2. J. Artamonova, R. Leipus, Multinominis obligacijų rinkos modelis, *Liet. matem. rink.*, **44**, 413–428 (2004b) (rusų k.).
3. R.R. Bliss, Jr., E.I. Ronn, Arbitrage-based estimation of non-stationary shifts in the term structure of interest rates, *Journal of Finance*, **44**, 591–610 (1989).
4. J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein, Option pricing: a simplified approach, *Journal of Financial Economics*, **7**, 229–263 (1979).
5. P.H. Dybvig, Bond and bond option pricing based on the current term structure, in: M.A. Dempster, S. Pliska (Eds.), *Mathematics of Derivative Securities*, Cambridge University Press, Cambridge (1997), pp. 271–293.
6. D. Heath, R. Jarrow, A. Morton, Bond pricing and the term structure of interest rates: a discrete time approximation, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **25**, 419–440 (1990).
7. D. Heath, R. Jarrow, A. Morton, Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica*, **60**, 77–105 (1992).
8. T.S. Ho, S. Lee, Term structure movements and pricing interest rate contingent claim, *Journal of Finance*, **41**, 1011–1029 (1986).
9. J.C. Hull, *Options, Futures, And Other Derivatives*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ (2005).
10. R. Leipus, A squared binomial tree approach to discrete-time bond market modelling, in: B. Grigelionis *et al.* (Eds.), *Probability Theory and Math. Statist.*, *Proceedings of the Seventh Vilnius Conference*, 1998, TEV, Vilnius–VSP, Utrecht (1999), pp. 429–440.

SUMMARY

J. Artamonova. Simulation of bond prices

In this paper we introduce the estimation technique for the parameters of the bond pricing model. The proposed methods are illustrated by the Lithuanian Government securities. The results show that a squared binomial (two-factor) bond market model approximates the bond prices more precisely than analogous quadronomial (one-factor) model.

Keywords: bond market, squared binomial model, quadronomial model.