Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 53–57

Silpnai netiesinės hiperbolinės sistemos asimptotinio sprendinio pagrindimas

Aleksandras KRYLOVAS (VGTU)
el. paštas: akr@fm.vtu.lt

1. Nagrinėjama pirmosios eilės sistema su mažuoju teigiamu parametru ε

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial x} = \varepsilon f_j(u), \quad u = (u_1, \ldots, u_n), \tag{1}$$

ir periodinėmis pradinėmis sąlygomis:

$$u_j(0, x, \varepsilon) = u_{0j}(x) \equiv u_{0j}(x + 2\pi), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Visos (1), (2) uždavinio funkcijos yra tolydžiai diferencijuojamos:

$$f_j(u) \in C^p(R^n), \quad u_{0j}(x) \in C^p_{2\pi}(R), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad p \geqslant 1. \tag{3}$$

Indeksu 2π žymimas funkcijų periodas.

Darbuose [1], [2] buvo sukonstruotas tolygiai tinkamas srityje $(t, x) \in [0, \mathrm{O}(\varepsilon^{-1})] \times [0, 2\pi]$ asimptotinis sprendinys

$$u_j(t, x; \varepsilon) = v_{0j}(\tau, y_j) + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k \big(v_{jk}(\tau, y_j) + w_{jk}(\tau, y)\big) + \mathrm{O}(\varepsilon^{N+1}). \tag{4}$$

Čia $\tau = \varepsilon t$ – lėtasis laikas, $y_j = x - \lambda_j t$ – greitieji charakteristiniai kintamieji, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, funkcijos $v_{jk}(\tau, y_j)$ randamos iš suvidurkintosios sistemos

$$\frac{\partial v_{jk}}{\partial \tau} = M_j\big[f_{jk}(\tau, y, v_k)\big], \quad v_k = (v_{1k}, \ldots, v_{nk}), \tag{5}$$

o funkcijas $w_{jk}(\tau, y) \equiv \tilde{w}_{jk}(\tau, t, x)$ galima rasti tiesioginiu integravimu, sprendžiant tokias lygtis

$$\frac{\partial \tilde{w}_{jk}}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial \tilde{w}_{jk}}{\partial x} = f_{jk} - \frac{\partial v_{jk}}{\partial \tau} \equiv g_{jk}(\tau, t, x), \quad \tilde{w}_{jk}(\tau, 0, x) = 0. \tag{6}$$

Funkcijos $f_{jk}(\tau, y, v_k)$ randamos standartiniu būdu, įstatant (4) į (1), (2) uždavinį ir lyginant vienodų ε laipsnių koeficiantus (žr. [1], [2]). Vidurkinimo pagal (1) sistemos j-tąją charakteristiką (5) sistemos operatorius M_j apibrėžiamas taip:

$$M_j\big[f(\tau, t, x)\big] = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, s, y_j + \lambda_j s)\, \mathrm{d}s. \tag{7}$$

Funkcijos $v_{jk}(\tau, y_j)$ yra 2π – periodinės pagal kintamuosius y_i. Todėl funkcijos g_{jk} (6) lygtyse skleidžiamos Furjė eilutėmis:

$$g_{jk} \sim \sum_{l \in Z^n} g_{jkl}(\tau) \exp\{i < l, y >\}, \quad < l, y >= l_1 y_1 + \cdots + l_n y_n. \tag{8}$$

Įstatome (8) į (6) lygtis ir integruojame:

$$w_{jk}(\tau, y) = \sum_{l:\ \delta_{jl} \neq 0} g_{jkl}(\tau) \frac{\exp\{i < l, y >\} - \exp\{i < l, y_j >\}}{i\delta_{jl}}. \tag{9}$$

Čia $< l, y_j >= (l_1 + \cdots + l_n) y_j$, $w_{jk}(\tau, x - \lambda_1 t, \ldots, x - \lambda_n t) \equiv \tilde{w}_{jk}(\tau, t, x)$,

$$\delta_{jl} = l_1(\lambda_j - \lambda_1) + l_2(\lambda_j - \lambda_2) + \cdots + l_n(\lambda_j - \lambda_n). \tag{10}$$

Darbe [1] reikalaujama, kad (1) sistemos koeficientai būtų racionaliai bendramačiai:

$$\frac{\lambda_j - \lambda_p}{\lambda_j - \lambda_q} = \frac{m_{jpq}}{n_{jpq}}, \quad m_{jpq} \in Z, \quad n_{jpq} \in N. \tag{11}$$

Kai bent viena iš (11) lygybių negalioja (t.y. tarp skaičių m_{jpq}, n_{jpq} yra iracionaliųjų), (9) eilutės turi mažuosius vardiklius δ_{jl}. Darbe [2] buvo nagrinėjami algebriniai skaičiai m_{jpq}, n_{jpq} (11) lygybėse. Tai leidžia įvertinti (10) dydžių mažėjimo greitį:

$$\delta_j^L \equiv \min_{\|l\| \equiv \sqrt{l_1^2 + \cdots + l_n^2} \leqslant L,\ \delta_{jl} \neq 0} |\delta_{jl}| \geqslant \frac{C}{L^d}. \tag{12}$$

Konstantos C, d nepriklauso nuo L, o skaičius d priklauso tik nuo algebrinių skaičių λ_j laipsnių. Jei (3) sąlygų parametras p pakankamai didelis (žr. [2]), (8) eilučių koeficientai g_{jkl} mažėja (kai $\|l\| \to +\infty$) greičiau, negu (12) dydžiai ir (9) eilutės konverguoja. Tada visos (4) skleidinio funkcijos w_{jk} yra aprėžtos.

Pastebėkime, kad (12) nelygybė galioja beveik visiems Lebego mato prasme skaičiams, kai $d = n$. Tačiau jei λ_j kurie nors konkretūs transcendentiniai skaičiai, paprastai nėra žinoma ar jiems galioja (12) pavidalo įverčiai. Darbuose [3,4] buvo pagrįsta (4)–(7) metodo modifikacija, kai koeficientai λ_j keičiami taip:

$$\lambda_j = \lambda_j^0(\varepsilon) + \varepsilon \lambda_j^1(\varepsilon), \tag{13}$$

o skaičiai $\lambda_j^0(\varepsilon)$ jau turi (12) savybę.

2. Nors (13) koeficientų λ_j keitinys leidžia sukonstruoti tolygiai tinkamą srityje $t \sim \mathrm{O}(\varepsilon^{-1})$ asimptotiką, nei praktiniai tokio keitinio konstravimo aspektai, nei skleidinio asimptotinės savybės nebuvo ištirtos. Šiame darbe mes parodysime, kad ir netaikant koeficientų (13) keitinio, (4) asimptotikos pirmasis artinys v_0 yra tolygiai tinkamas srityje $(t, x) \in [0, \frac{c_0}{\varepsilon}] \times [0, 2\pi]$ (konstanta c_0 nepriklauso nuo ε). Tačiau (13) ketinys leidžia pagerinti asimptotikos savybes ir esant fiksuotai mažuojo parametro ε reikšmei, galima minimizuoti asimptotinio artinio paklaidą.

Tarkime, kad (6) formulėmis apibrėžtos funkcijos $g_{jk}(\tau, y)$ srityje $(\tau, y) \in [0, c_0] \times [0, 2\pi]^n$ yra m kartų tolydžiai diferencijuojamos pagal kintamuosius y_i. Tada (9) Furjė eilutės koeficientams galioja įvertis

$$\left|g_{jl}(\tau)\right| \leqslant \frac{C}{\|l\|^m}. \tag{14}$$

Pažymėkime

$$G_{jl} = \max_{(\tau,y)\in[0,c_0]\times[0,2\pi]^n} \left|g_{jl}(\tau)\right| \cdot \left|\frac{\exp\{i < l, y >\} - \exp\{i < l, y_j >\}}{i\delta_{jl}}\right|,$$

$$A_L = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{\|l\|\leqslant L:\ \delta_{jl}\neq 0} G_{jl}. \tag{15}$$

Funkcija A_L: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ yra nemažėjanti (kaip bet kuri neneigiamų dydžių suma). Jei funkcija A_L aprėžta, (9) eilutė konverguoja. Tai yra pakankama (4) asimptotikos tolygaus tinkamumo srityje $t \sim \mathrm{O}(\varepsilon^{-1})$ sąlyga. Tokį atvejį turime (žr. [2]), jei (14) ir (12) įverčių parametrai $m > d + 1$.

Bendruoju atveju, kai nėra jokių apribojimų algebrinėms skaičių λ_j savybėms, funkcijos A_L neaprėžtai didėja, kai $L \to +\infty$. Pažymėkime μ_L funkcijų $g_{j1}(\tau, y)$ aproksimacijos $[L]$-tojo laipsnio trigonometriniu polinomu paklaidą. Turime $\mu_L = \mathrm{o}(1)$, kai $L \to +\infty$. Tada (6) lygčių sprendinius $\tilde{w}_{j1}$ galima įvertinti taip:

$$\begin{aligned}
&\left|\tilde{w}_{j1}(\tau, t, x)\right| \\
&= \left|\int_0^t \sum_{l\in Z:\ \delta_{jl}\neq 0} g_{j1l}(\tau) \exp\Big\{i\big(\dots + l_i(x - \lambda_j t + (\lambda_j - \lambda_i)s) + \dots\big)\Big\}\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^t \sum_{\|l\|\leqslant L:\ \delta_{jl}\neq 0} (\cdots)\,\mathrm{d}s\right| + \left|\int_0^t \sum_{\|l\|>L} (\cdots)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant A_L + t\mu_L.
\end{aligned} \tag{16}$$

Pasirinkime dydžius $L(\varepsilon) \to +\infty$ $(\varepsilon \to 0)$ taip, kad būtų

$$\varepsilon A_{L(\varepsilon)} = \mathrm{o}(1), \quad \text{kai } \varepsilon \to 0. \tag{17}$$

Iš (16), (17) reiškinių srityje $(t, x) \in \left[0, \frac{c_0}{\varepsilon}\right] \times [0, 2\pi]$ gauname iverčius

$$\varepsilon\left|\tilde{w}_{j1}(\varepsilon t, t, x)\right| \leqslant \varepsilon A_{L(\varepsilon)} + \varepsilon t\mu_{L(\varepsilon)} = \mathrm{o}(1), \quad \text{kai } \varepsilon \to 0, \tag{18}$$

arba

$$\varepsilon\|w_1\| = \max\left\{\mathrm{O}(\varepsilon A_{L(\varepsilon)}), \mathrm{O}(\mu_{L(\varepsilon)})\right\}. \tag{19}$$

Geriausią įvertį gauname, kai (19) formulėje turime lygybę

$$\varepsilon A_{L(\varepsilon)} = \mu_{L(\varepsilon)}. \tag{20}$$

Tarkime, kad galioja (12) ir (14) tipo įverčiai. Tada su tam tikrais teigiamais parametrais r ir s turime $A_L \sim L^r$, $\mu_L \sim L^{-s}$. Iš (20) lygybės gauname, kad (19) įvertį galima užrašyti taip:

$$\varepsilon\|w_1\| = \mathrm{O}\big(\varepsilon^{\frac{s}{r+s}}\big). \tag{21}$$

Taigi atvejis $r = 0$ reiškia (9) eilutės konvergavimą ir buvo išnagrinėtas autoriaus darbe [2]. Trupmeninių ε laipsnių atvejis $r > 0$ atsiranda, kad uždavinio funkcijų glodumas nėra pakankamas mažųjų vardiklių nykimo greičiui kompensuoti. Pastebėkime, kad darbuose [2-4] buvo reikalaujamas pakankamas funkcijų glodumas ir todėl atvejis $r > 0$ ten irgi nenagrinėjamas. Taigi šiame darbe gautas naujas rezultatas (21), kuris reiškia, kad nesant pakankamam funkcijų glodumui, (4) asimptotikos pirmasis artinys turės paklaidą $\mathrm{O}(\sqrt{\varepsilon})$, $\mathrm{O}(\sqrt[3]{\varepsilon})$, $\mathrm{O}(\sqrt[3]{\varepsilon^2})$, $\mathrm{O}(\sqrt[5]{\varepsilon^4})$ ir panašiai, jei sistemos koeficientams λ_j galioja (12) reikalavimai. Jei koeficientams λ_j jokių apribojimų nėra, asimptotikos paklaidos įvertinimas yra tik $\mathrm{o}(1)$.

Taikant gautus rezultatus bei asimptotikos pagrindimo metodiką [5], galima įrodyti tokį teiginį.

TEOREMA. *Tarkime, kad* (1)–(3) *uždavinio koeficientams* λ_j *galioja* (12) *įvertis. Tada egzistuoja tokios nepriklausančios nuo mažojo parametro* ε *teigiamos konstantos* c_0, C, ε_0, s *ir neneigiama konstanta* r, *kad:*

1) *srityje* $(t, x) \in [0, \frac{c_0}{\varepsilon}] \times [0, 2\pi] \equiv \mathfrak{D}_\varepsilon$, *egzistuoja vienintelis* (1)–(3) *uždavinio tikslusis sprendinys* $u_j(t, x; \varepsilon) \in C^p_{2\pi}(\mathfrak{D}_\varepsilon)$;

2) *srityje* $(\tau, y_j) \in [0, c_0] \times [0, 2\pi] \equiv \mathfrak{D}_0$ *egzistuoja vienintelis* (5), (7) *suvidurkintosios sistemos sprendinys* $v_j(\tau, y_j) \in C^p_{2\pi}(\mathfrak{D}_0)$;

3) $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

$$\big|u_j(t, x; \varepsilon) - v_j(\varepsilon t, x - \lambda_j t)\big| < C\varepsilon^{\frac{s}{r+s}}. \tag{22}$$

Konstantos r, s *priklauso tik nuo* (3) *ir* (12) *sąlygų parametrų* p, d. *Kai* $p \gg d$, *turime* $r = 0$.

3. Gauti įverčiai galioja, kai (13) lygybėse $\lambda^0_j(\varepsilon) \equiv \lambda_j$, t.y. sistemos koeficientai λ_j nekeičiami. Tačiau (13) keitinys leidžia pagerinti asimptotikos savybes, t.y. sumažinti asimptotinio artinio paklaidą, esant fiksuotai ε reikšmei. Pažymėkime rezonansinių harmonikų aibę

$$\mathfrak{R}_{j,\,\varepsilon} = \big\{l \in Z^n\colon\ \|l\| \leqslant L(\varepsilon),\ \delta_{jl} \neq 0,\ |\delta_{jl}| \leqslant \mu_{L(\varepsilon)}\big\}.$$

Sunumeruokime rezonansinius vektorius rezonanso eilės (t.y. $\|l\|$) didėjimo tvarka:

$$l^{(1)},\ l^{(2)}, \ldots, \|l^{(i)}\| \leqslant \|l^{(i+1)}\|, \quad l^{(i)} \in \mathfrak{R}_{j,\,\varepsilon}.$$

Pažymėkime $\delta^0_{jl}(\varepsilon)$ (10) formulėmis apibrėžtus dydžius, keičiant λ_j jų artiniais $\lambda^0_j(\varepsilon)$, taikant (13) keitinį. Sudarome lygčių sistemą

$$\delta^0_{jl^{(1)}} = 0, \quad \delta^0_{jl^{(2)}} = 0, \quad \delta^0_{jl^{(3)}} = 0, \ \ldots. \tag{23}$$

Taigi (13) keitinys turi būti konstruojamas taip, kad paversti mažuosius vardiklius tiksliais nulias su kuo žemesnių eilių rezonansiniais vektoriaias. Praktikoje tai reiškia, kad reikia ieškoti koeficientų racionaliųjų artinių $\lambda_j = \frac{p_j}{q_j}$, $q_j = \mathrm{O}(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$, sprendžiant kuo daugiau (23) sistemos lygčių. Tai nėra paprastas uždavinys, tačiau principinė jo sprendimo schema yra aiški. Pastebėkime, kad šiuos artininius galima konstruoti nesprendžiant suvidurkintosios sistemos (5), (7). Šios schemos realizacija turėtų visą eilę įdomių teorijos taikymų hiperbolinių bangų rezonansinės sąveikos modeliuose (žr. [6]).

Literatūra

1. A. Štaras, Asymptotic integration of weakly nonlinear partial differential equations, *Sov. Math., Dokl.*, **18**(1977), 1462–1466 (1978); translation from *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **237**, 525–528 (1977).
2. A. Krylovas, Apie pirmosios eilės hiperbolinių sistemų asimptotinį integravimą, *Liet. matem. rink.*, **23**(4), 12–17 (1983).
3. A. Krylovas, Silpnai netiesiškų diferencialinių sistemų sprendinių asimptotinis aproksimavimas, *Liet. matem. rink.*, **25**(2), 102–113 (1985).
4. A.V. Krylov, Asymptotic integration of weakly nonlinear partial differential systems, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, **26**(1), 72–79 (1986).
5. A. Krylovas, Vidinio vidurkinimo išilgai charakteristikų metodo pagrindimas silpnai netiesinėms sistemoms. I, *Liet. matem. rink.*, **29**(4), 721–732 (1989).
6. A. Krylovas, R. Čiegis, Examples of asymptotic analysis of hyperbolics equations, in: A. Buikis, R. Čiegis, A.D. Fitt (Eds.), *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2002*, Springer–Verlag, Berlin (2003), pp. 315–320.

SUMMARY

A. Krylovas. Substantiation of asymptotical solution of weakly nonlinear hyperbolic system

A hyperbolic system of first order partial differential equations with small parameter and periodical initial conditions is obtained. The uniformly valid in a long time interval asymptotical solution can be constructed using the averaging along characteristics of the system. The asymptotical estimation of the approximation is made in the paper. Some aspects of practical realization of the method are discussed in the work too.

Keywords: perturbation methods, averaging, resonances, hyperbolic systems.