Liet. matem. rink, **46***, spec. nr.*, 2006, 58–63

Rymano–Hilberto kraštinis uždavinys daugiamatėms elipsinėms sistemoms

Eugenijus PALIOKAS (VGTU)
el. paštas: paliokas@takas.lt

Rymano–Hilberto kraštinis uždavinys: rasti realiąsias funkcijas $u(x, y)$, $v(x, y)$, srityje $S \subset \mathbb{R}^2$ tenkinančias Koši–Rymano sistemą

$$u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0 \tag{1}$$

ir kraštines sąlygas

$$(\alpha u + \beta v)|_{\partial S} = f, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \tag{2}$$

kur $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $f(x, y)$ – duotosios srities krašte ∂S funkcijos, yra vienas iš fundamentaliųjų kompleksinių funkcijų teorijos uždavinių.

Nagrinėti įvairūs šio uždavinio apibendrinimai, pavyzdžiui, (žr. [1], [2]): rasti analizinę kompleksinėje srityje S funkciją $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tenkinančią kraštinę sąlygą

$$\operatorname{Re}\{\lambda(\zeta) f(\zeta)\} = \varphi(\zeta), \quad \zeta \in \partial S,$$

kur $\lambda(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$ – kompleksinės duotosios ∂S funkcijos. Šitokių kraštinių uždavinių daugiamačiai analogai erdvėse $\mathbb{C}^n$ nagrinėti [3], [4].

Nagrinėsime daugiamačius Koši–Rymano sistemų analogus ir Rymano–Hilberto tipo kraštinį uždavinį tokioms sistemoms.

Koši–Rymano sistemą galima užrašyti šitokiu pavidalu:

$$\left(E\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

kur $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pastebėkime, kad $M^2 = -E$. Ši sistema ekvivalenti matricinei lygčiai

$$DU = O, \tag{3}$$

kur O – dvimatė kvadratinė nulinė matrica, $D = E\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y}$, $U = Eu(x, y) + Mv(x, y)$.

Pažymėkime $z = Ex + My$, tada $U(z) = Eu(x, y) + Mv(x, y)$ yra kompleksinio kintamojo z funkcija, E ir M – realusis ir menamasis vienetai. Jungtinį kompleksinį skaičių žymėkime $\overline{z} = Ex - My$, o jungtinį diferencialinį operatorių $\overline{D} = E\frac{\partial}{\partial x} - M\frac{\partial}{\partial y}$. Tada $D\overline{D} = \overline{D}D = \Delta$ – Laplaso operatorius.

Pažymėkime

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & D^* \\ -\overline{D}^* & \overline{D} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

kur

$$D^* = E\frac{\partial}{\partial z} + M\frac{\partial}{\partial w}, \quad \overline{D^*} = E\frac{\partial}{\partial z} - M\frac{\partial}{\partial w}.$$

Elipsinį diferencialinį operatorių $\mathbf{D}$ galima užrašyti tokiu pavidalu:

$$\mathbf{D} = E\frac{\partial}{\partial x} + M_1\frac{\partial}{\partial y} + M_2\frac{\partial}{\partial z} + M_3\frac{\partial}{\partial w},$$

kur E – 4×4 vienetinė matrica,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricos M_1, M_2, M_3 tenkina lygybes

$$M_iM_j + M_jM_i = 2\delta_{ij}E, \tag{5}$$

$$M_1M_2 = M_3, \quad M_1M_3 = -M_2, \quad M_2M_3 = M_1, \tag{6}$$

kur δ_{ij} – Kronekerio simbolis. Sistema

$$\mathbf{D}(uE + v_1M_1 + v_2M_2 + v_3M_3) = O \tag{7}$$

ekvivalenti Koši–Rymano sistemai (3), kai $v = v_1$, $v_2 \equiv v_3 \equiv 0$. Dėka (5) ir (6) lygybių matricų rinkinys $\{E, M_1, M_2, M_3\}$ gali būti traktuojamos kaip matricinis kvaternionų bazės pavidalas. Nepriklausomus kintamuosius x, y, z, w pakeitus kvaternioniniu kintamuoju

$$\mathbf{Z} = xE + yM_1 + zM_2 + wM_3,$$

(7) lygtis sutampa su Fueter sąlygomis, ji gali būti tiriama kvaternioninių funkcijų teorijos metodais, žr., pavyzdžiui, [5]. Kai u, v_1, v_2, v_3 yra kompleksinės funkcijos, ši sistema yra ekvivalenti Maksvelo homogeninėms lygtims, žr. [6].

1 pastaba. (7) lygtis ekvivalenti lygčių sistemai

$$\mathbf{DU} = \mathbf{0},$$

kur $\mathbf{U} = (u, -v_1, -v_2, -v_3)^T$, $\mathbf{0}$ - keturmatis nulinis vektorius.

Dėka (5) savybių matricos E, M_1, M_2, M_3 yra tiesiškai nepriklausomos, todėl šis teiginys seka iš lygybės

$$\Big(E\frac{\partial}{\partial x} + M_1\frac{\partial}{\partial y} + M_2\frac{\partial}{\partial z} + M_3\frac{\partial}{\partial w}\Big)(uE + v_1M_1 + v_2M_2 + v_3M_3)$$
$$= V_0E + V_1M_1 + V_2M_2 + V_3M_3,$$

kur

$$\mathbf{D}(u, -v_1, -v_2, -v_3)^T = (V_0, -V_1, -V_2, -V_3)^T.$$

(7) lygties sprendiniai yra reguliarios kvaternioninės funkcijos, žr. [5]. Jos yra harmoninės, nes $\mathbf{D}\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{D}}\mathbf{D} = \Delta$, kur Δ – Laplaso operatorius pagal kintamuosius x, y, z, w, o

$$\overline{\mathbf{D}} = E\frac{\partial}{\partial x} - M_1\frac{\partial}{\partial y} - M_2\frac{\partial}{\partial z} - M_3\frac{\partial}{\partial w}.$$

Kintamasis $\mathbf{Z}$, užrašytas matricos forma, yra keturmatė Viljamsono tipo Adamaro matrica. Lygtis

$$\left(E\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n-1} M_k\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\left(Eu + \sum_{k=1}^{n-1} M_k v_k\right) = O, \tag{8}$$

ekvivalenti (7) lygčiai, kai $n = 8$, $v_k \equiv 0$, $k = 4, ..., 7$, o $\{E, \ M_k, \ k = 1, ..., 7\}$ yra dešiniojo oktonionų matricinio pavidalo bazė (žr. [7]). Tokiu atveju $Ex + \sum_{k=1}^{7} M_k y_k$ yra aštuonmatė Viljamsono tipo Adamaro matrica.

Nagrinėkime (8) lygtį, kai $m \times m$ matricos M_k, $k = 1, ..., n-1$ tenkina (5) savybes, o E yra to paties matavimo vienetinė matrica. Pastovių realiųjų $m \times m$ matricų M_k, tenkinančių (5) savybes, maksimalus skaičius lygus

$$\rho = 8b + 2^c - 1,$$

kur $m = (2a + 1)2^{4b+c}$, žr. [8]. Pažymėkime

$$Z = xE + \sum_{k=1}^{n-1} M_k y_k, \quad \overline{Z} = xE - \sum_{k=1}^{n-1} M_k y_k, \quad \{Z\} = \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Re}\,(Z) = x, \quad \mathrm{Im}(Z) = \sum_{k=1}^{n-1} M_k y_k,$$

kur $x, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, ..., n-1$, ir

$$U = uE + \sum_{k=1}^{n-1} M_k v_k, \quad \overline{U} = uE - \sum_{k=1}^{n-1} M_k v_k,$$

$$D = E\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n-1} M_k \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad \overline{D} = E\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n-1} M_k \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Tegu $\mathbb{S} \subset \mathbb{Z}$ – bet kokia žvaigždės pavidalo sritis: $\forall Z \in \mathbb{S},\ \forall s \in [0,1) \Rightarrow sZ \in \mathbb{S}$. Ieškokime turinčio tolydžias antrąsias išvestines srityje $\mathbb{S}$ (8) lygties sprendinio U, tenkinančio kraštinę sąlygą

$$\operatorname{Re} U|_{\partial\mathbb{S}} = \Phi(Z), \tag{9}$$

kur $\Phi(Z)$: $\partial\mathbb{S} \to \mathbb{R}$ – duotoji funkcija. Kai $m = n = 2,\ M_1 = M$ ir (2) sąlygoje $\alpha \equiv 1,\ \beta \equiv 0$, šis uždavinys sutampa su Rymano–Hilberto uždaviniu Koši–Rymano sistemai (1), (2). (8) lygties sprendinį galima sukonstruoti panašiai kaip keturmačiu atveju.

TEOREMA. *Jei $u(Z)$: $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ yra bet kuri harmoninė srityje $\mathbb{S}$ funkcija, turinti tolydžias antrąsias išvestines, (8) lygtis turi sprendinį $U(Z)$, tenkinantį sąlygą $\operatorname{Re} U(Z) = u(Z)$.*

Įrodymas. Funkcija

$$U(Z) = Eu(Z) + \operatorname{Im} \int_0^1 s^{n-2} (\overline{D}u)(sZ) Z \, \mathrm{d}s, \tag{10}$$

kur

$$\overline{D}u(Z) = E\frac{\partial u}{\partial x}(Z) - \sum_{k=1}^{n-1} M_k \frac{\partial u}{\partial y_k}(Z),$$

tenkina (8) lygtį srityje $\mathbb{S}$. Iš tiesų,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \int_0^1 s^{n-2} (\overline{D}u)(sZ) Z \, \mathrm{d}s \\
&\quad= \operatorname{Re} \int_0^1 s^{n-2} \biggl(E\frac{\partial u}{\partial x}(sZ) - \sum_{k=1}^{n-1} M_k \frac{\partial u}{\partial y_k}(sZ) \biggr) \biggl(Ex + \sum_{k=1}^{n-1} M_k y_k \biggr) \mathrm{d}s \\
&\quad= \operatorname{Re} \int_0^1 s^{n-2} E \biggl(x\frac{\partial u}{\partial x}(sZ) + \sum_{k=1}^{n-1} y_k \frac{\partial u}{\partial y_k}(sZ) \biggr) \mathrm{d}s \\
&\quad= \int_0^1 s^{n-2} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}(sZ) \, \mathrm{d}s = u(Z) - (n-2) \int_0^1 s^{n-1} u(sZ) \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Todėl

$$U(Z) = \int_0^1 s^{n-2} (\overline{D}u)(sZ) Z \, \mathrm{d}s + (n-2)E \int_0^1 s^{n-1} u(sZ) \, \mathrm{d}s.$$

Kadangi u ir $\overline{D}u$ turi tolydžias pirmąsias dalines išvestines srityje $\mathbb{S}$, galime diferencijuoti pointegralines funkcijas, todėl

$$DU(Z) = \int_0^1 s^{n-2} D\big(\overline{D}u(sZ)\big) Z\,\mathrm{d}s + \int_0^1 s^{n-2}\left((\overline{D}u)(sZ) + (\overline{D}u)(sZ)\sum_{k=1}^{n-1} {M_k}^2\right)\mathrm{d}s$$
$$+ (n-2)\int_0^1 s^{n-2}(Du)(sZ)\,\mathrm{d}s.$$

Matricų M_k savybės šioje lygybėje yra esminės. Kadangi $u(Z)$ – harmoninė srityje S funkcija, turime:

$$D\big((\overline{D}u)(sZ)\big) = Es(\Delta u)(sZ) = O.$$

Iš šios ir iš žemiau parašytos lygybės

$$(\overline{D}u)(sZ) + (\overline{D}u)(sZ)\sum_{k=1}^{n-1} {M_k}^2 = -(n-2)(\overline{D}u)(sZ)$$

gauname:

$$DU(Z) = O.$$

Teorema įrodyta.

Išvada. Kraštinis uždavinys (8), (9) žvaigždės pavidalo srityje S turi sprendinį, jei skaliarinis Dirichle uždavinys Laplaso lygčiai n kintamųjų $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ atžvilgiu turi sprendinį srityje S su tais pačiais kraštiniais duomenimis.

2 pastaba. Teoremos įrodyme nurodytu pavidalu galime konstruoti (8) lygties sprendinius. Kadangi, kai $n > 2$, net ne bet kurios tiesinės funkcijos tenkina (8) lygtį, ši jos sprendinio išraiška tampa naudinga.

3 pastaba. Jei $U(Z)$ – (8) lygties sprendinys, tai funkcija $\tilde{U}(Z) = U(Z) + \overline{D}U^*(Y)$, kur

$$Y = \sum_{k=1}^{n-1} M_k y_k, \qquad \Delta^* U^*(Y) = O,$$

o Δ^* – Laplaso operatorius pagal kintamuosius $y_1, \ldots, y_{n-1}$ taip pat tenkina (8) lygtį.

Literatūra

1. H. Begehr, *Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations*, World Scientific, London (1994).
2. A. Kumar, A generalized Riemann boundary problem in two variables, *Arch. Math.*, **62**, 531–538 (1994).
3. H. Begehr, Riemann-Hilbert boundary value problems in $\mathbb{C}^n$, *Partial Diff. and Int. Equations*, Kluwer Acad. Pub. (1999).

4. H. Begehr, A. Mohammed, *The Riemann-Hilbert problem for torus domain*, spaudoje.
5. A. Sudbery, Quaternionic analysis, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **85**, 199–225 (1979).
6. C. Lanczos, The relations of the homogeneous Maxwell's equations to the theory of functions, eprint `arXiv:physics/o408079` (2004).
7. Y. Tian, Matrix representations of octonions and their applications, eprint `arXiv:math.RA/0003166 v2` (2000).
8. J.F. Adams, P.D. Lax, R.S. Phillips, On matrices whose real linear combinations are nonsingular, *Proc. Amer. Mat. Soc.*, **16**, 318–322 (1965).

SUMMARY

E. Paliokas. Riemann–Hilbert boundary value problem for multidimensional elliptic systems of equations

Multidimensional analogues of Cauchy–Riemann equations and of Riemann–Hilbert boundary value problem are studied. Their relation to the scalar boundary value problem is demonstrated.

Keywords: elliptic systems, boundary value problems, Riemann–Hilbert problem.