*Liet. matem. rink,* **46***, spec. nr.*, 2006, 73–77

# Aukštesniųjų eilių glaustiniai paraboloidai

Kazimieras NAVICKIS (VU)
el. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

**Reziumė.** Šiame darbe nagrinėjami paviršiaus aukštesniųjų eilių glaustiniai paraboloidai afininėje koordinačių sistemoje. Tokių glaustinių paraboloidų panaudojimas leidžia analizuoti ir vizualizuoti duotojo paviršiaus lokalines savybes, kurios priklauso nuo aukštesniųjų eilių dalinių išvestinių.

*Raktiniai žodžiai:* paviršius, glaustinis paviršius, glaustinis paraboloidas, afininė diferencialinė geometrija.

Tarkime, kas $S$ – paviršius trimatėje Euklido erdvėje, apibrėžtas išreikštine lygtimi $(\alpha, \beta, \gamma \ldots = 1, 2)$

$$S\colon\ x^3 = f(x^\alpha); \tag{1}$$

čia $f$ yra tolydinė funkcija, turinti tolydines dalines išvestines taške $(x_0^1; x_0^2)$ iki eilės $r + 1$; $r \in \mathbb{N}$. Paviršių $S$ nagrinėsime jo taško $M_0(x_0^1; x_0^2; x_0^3)$ aplinkoje; čia $x_0^3 = f(x_0^1, x_0^2)$. Pažymėkime

$$f_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = \frac{\partial^p f}{\partial x^{\alpha_1} \ldots \partial x^{\alpha_p}},$$

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = f\alpha_1 \ldots \alpha_p\big|_{M_0};$$

čia $\alpha_1, \ldots, \alpha = 1, 2$. Iš paviršiaus $S$ lygties

$$S\colon\ \vec{r} = \{x^1; x^2; f(x^1, x^2)\}$$

randame, kad

$$\overrightarrow{r_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} = \{1; 0; f_1\},$$

$$\overrightarrow{r_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} = \{0; 1; f_2\},$$

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2} = \{-f_1; -f_2; 1\}.$$

Pažymėkime

$$E = 1 + (f_1)^2,\ W = \sqrt{1 + (f_1)^2 + (f_2)^2};$$

$$E_0 = 1 + (a_1)^2,\ W_0 = \sqrt{1 + (a_1)^2 + (a_2)^2}.$$

Paviršiaus $S$ taške $M_0$ turime tris ortus:

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\{1; 0; a_1\} \;=\; \{l_1^1; l_2^2; l_1^3\},$$

$$\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{W_0}\,\{-a_1; -a_2; 1\} \;=\; \{l_3^1; l_3^2; l_3^3\},$$

$$\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{W_0\sqrt{E_0}}\,\{-a_1a_2; 1+(a_1)^2; (a_2)^2\} \;=\; \{l_2^1; l_2^2; l_2^3\}.$$

Bet kurio erdvės taško $M(x^1; x^2; x^3)$ koordinates bazės $\{\overrightarrow{e_i}\}$ $(i, j, k, \ldots = 1, 2, 3)$ atžvilgiu žymėsime $X^1$, $X^2$, $X^3$. Tada

$$X = X_0 + X_{(1)} \cdot R^t; \tag{2}$$

čia

$$X = (x^1\ x^2\ x^3),$$
$$X_0 = (x_0^1\ x_0^2\ x_0^3),$$
$$X_{(1)} = (X^1\ X^2\ X^3),$$
$$R = \| l_j^i \|$$

($i$ – eilutės numeris, $j$ – stulpelio numeris), $R^t$ – transponuota matrica $R$. Paviršiaus $S$ lygtis, atlikus (2) koordinačių transformaciją, bus tokia:

$$S\colon\ g(X^1, X^2, X^3) \equiv f(x_0^\alpha + l_i^\alpha X^i) - (x_0^3 + l_i^3 X^i) = 0. \tag{3}$$

Pažymėkime

$$g_{i_1\ldots i_p} = \frac{\partial^p g}{\partial X^{i_1}\ldots\partial X^{i_p}},$$
$$b_{i_1\ldots i_p} = q_{i_1\ldots i_p}\big|_{M_0}.$$

Aišku,

$$g_{i_1} = f_{\alpha_1} l_{i_1}^{\alpha_1} - l_{i_1}^3,$$
$$g_{i_1 i_2} = f_{\alpha_1\alpha_1} l_{i_1}^{\alpha_1} l_{i_2}^{\alpha_2},$$
$$g_{i_1\ldots i_p} = f_{\alpha_1\ldots\alpha_p} l_{i_1}^{\alpha_1}\ldots l_{i_p}^{\alpha_p},$$

ir todėl

$$b_{i_1\ldots i_p} = a_{\alpha_1\ldots\alpha_p} l_{i_1}^{\alpha_1}\ldots l_{i_p}^{\alpha_p},$$

kai $p \geqslant 2$ . Kadangi

$$b_\alpha = 0, b_3 = -W_0 \neq 0,$$

tai funkcija $g$ apibrėžia funkciją

$$X^3 = h(X^1, X^2).$$

Pažymėkime

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \frac{\partial^p X^3}{\partial X^{\alpha_1} \dots X^{\alpha_p}},$$
$$C_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = A_{\alpha_1 \dots \alpha_p}\big|_{M_0}.$$

Diferencialinių operatorių

$$\partial^{\#}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial X^{\alpha}} + A_{\alpha}\frac{\partial}{\partial X^3}$$

pagalba gauname naujus diferencialinius operatorius

$$\partial^{\#}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \partial^{\#}_{\alpha_p} \circ \dots \circ \partial^{\#}_{\alpha_1}.$$

Pažymėkime

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \partial^{\#}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} g.$$

Lygčių sistema

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_p}\big|_{C_\beta = 0} = 0,$$

t.y. sistema

$$
\begin{aligned}
&b_{\alpha\beta} + b_3 C_{\alpha\beta} = 0,\\
&b_{\alpha\beta\gamma} + 3C_{(\alpha\beta} b_{\gamma)3} + C_{\alpha\beta\gamma} b_3 = 0,\\
&b_{\alpha\beta\gamma\epsilon} + 6C_{(\alpha\beta} b_{\gamma\epsilon)3} + 4C_{\alpha\beta\gamma} b_{\epsilon 3)} + 3C_{\alpha\beta} C_{\gamma\epsilon)} b_{\epsilon 3} + C_{\alpha\beta\gamma\epsilon} b_3 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

yra išsprendžiama dydžių $C_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ atžvilgiu. Pažymėkime

$$\varphi_p = \frac{1}{p!} C_{\alpha_1 \dots \alpha_p} X^{\alpha_1} \dots X^{\alpha_p}.$$

Lygtis

$$O^{(r)}_{M_0}(S)\colon\ X^3 = \sum_{p=z}^{r} \varphi_p$$

apibrėžia $r$-osios eilės paviršių $O^{(r)}_{M_0}(S)$, kuris turi $r$-sios eilės kontaktą taške $M_0$ su duotuoju paviršiumi $S$ ir kuris vadinamas paviršiaus $S$ $r$-osios eilės glaustiniu paraboloidu taške $M_0$.

Pasirinkime kitą koordinačių sistemą. Trys vektoriai

$$\overrightarrow{E_1} = \vec{e}_1, \quad \overrightarrow{E_2} = \vec{e}_2, \quad \overrightarrow{E_3} = a^\alpha E_\alpha + \overrightarrow{e_3},$$

kai $a^\alpha \in \mathbb{R}$ yra fiksuoti skaičiai, nustato tris krypčių vektorius afininėje koordinačių sistemoje, kurios pradžios taškas yra $M_0$. Tarkime, kad $(u^1; u^2; F(u^1, u^2))$ yra paviršiaus $S$ taško koordinatės šios sistemos atžvilgiu. Tada

$$S\colon \begin{cases} X^\alpha = u^\alpha + a^\alpha F(u^\beta), \\ X^3 = F(u^\beta). \end{cases}$$

Pažymėkime

$$F_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = \frac{\partial^p F}{\partial u^{\alpha_1} \ldots \partial u^{\alpha_p}},$$
$$d_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = F_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\big|_{M_0},$$
$$\psi_p = \frac{1}{p!} d_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_p}.$$

Lygtis

$$Osc^{(r)}_{M_0}(S)\colon\ X^3 = \sum_{p=z}^{r} \psi_p$$

apibrėžia $r$-osios eilės glaustinį paraboloidą taške $M_0$ afininėje koordinačių sistemoje.

Šiame darbe įrodoma teorema, kurioje nustatomi ryšiai tarp $p$-formų $\varphi_p$ ir $\psi_p$. Atskiruoju atveju ją galima formuluoti taip.

TEOREMA. *Tarkime, kad*

$$g_{(z)} = a_{\alpha_1\alpha_2} a^{\alpha_1} u^{\alpha_2},$$
$$g_{(3)} = a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} a^{\alpha_1} u^{\alpha_2} u^{\alpha_3},$$
$$g_{(4)} = a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} a^{\alpha_1} u^{\alpha_2} u^{\alpha_3} u^{\alpha_4},$$
$$h_{(2)} = a_{\alpha_1\alpha_2} a^{\alpha_1} a^{\alpha_2},$$
$$h_{(3)} = a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} a^{\alpha_1} a^{\alpha_2} u^{\alpha_3}.$$

*Tada*

$$\psi_2 = \frac{1}{2} a_{\alpha_1\alpha_2} u^{\alpha_1} u^{\alpha_2},$$
$$\psi_3 = \frac{1}{6} a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} u^{\alpha_3} + g_{(2)} \psi_2,$$
$$\psi_4 = \frac{1}{24} a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} u^{\alpha_3} u^{\alpha_4} + \frac{1}{2} g_{(3)} \psi_2 + \Big(\frac{1}{3}\psi_3 + g_{(2)}\psi_2\Big) + \frac{1}{2} h_{(2)} (\psi_2)^2,$$

$$\psi_5 = \frac{1}{5!}a_{\alpha_1\ldots\alpha_5}u^{\alpha_1}\ldots u^{\alpha_5} + \frac{1}{6}g_{(4)}\psi_2 + \frac{1}{2}g_{(3)}\psi_3 + \frac{1}{2}h_{(3)}(\psi_2)^2 + h_{(2)}\psi_4 + h_{(2)}\psi_2 + \psi_3.$$

Glaustinis paraboloidas $Osc^z(S)$ duotąjį paviršių $S$ kerta kreive

$$\begin{cases} \psi_3 + \psi_4 + \cdots = 0, \\ X^3 = 0. \end{cases}$$

Sankirtos kreivė bendruoju atveju turi trigubq tašką $M_0$, kuriame trys liečiamosios anuliuoja kubinę formą $\psi_3$. Jos vadinamos paraboloido glaustinėmis liečiamosiomis.

Nagrinėsime visus glaustinius paraboloidus $Osc^{(2)}_{M_0}$, einančius per fiksuotą liečiamąją $(\lambda v^1; \lambda v^2; 0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Visų šių paraboloidų ašys sudaro plokštumą

$$(3a_{\alpha\epsilon}X^\epsilon a_{\beta\gamma} + a_{\alpha\beta\gamma}X^3)v^\alpha v^\beta v^\gamma = 0,$$

kuri yra vadinama Transono plokštuma. Pažymėkime

$$m_{\alpha\beta\gamma} = 3a_{\alpha\epsilon}a_{\beta\gamma}X^\epsilon + a_{\alpha\beta\gamma}X^3.$$

Visos Transono plokštumos

$$m_{\alpha\beta\gamma}v^\alpha v^\beta v^\gamma = 0$$

gaubia kūgį

$$\begin{vmatrix} m_{111} & 2m_{112} & m_{122} & 0 \\ 0 & m_{111} & 2m_{112} & m_{122} \\ m_{112} & 2m_{122} & m_{222} & 0 \\ 0 & m_{112} & 2m_{122} & m_{222} \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

kuris bendruoju atveju yra 4 eilės paviršius. Jis vadinamas $B$. Su kūgiu.

## Literatūra

1. G. Scheffers, Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf die Geometrie, Zweiter Band, Leipzig, Verlag von Veit & Comp. (1902).

SUMMARY

***K. Navickis. Osculating paraboloid***

Osculating paraboloid of second order have been studied in classical differential geometry. In this article we generalize this concept to osculating paraboloids of higher order. This yields a visualization of the local properties of a given surface which depend on the derivatives of higher order.

*Keywords:* surface, osculating surface, osculating paraboloid.