

Akselerometrų taikymo matematinis modelis

Vincas BENEVIČIUS, Narimantas LISTOPADSKIS (KTU)

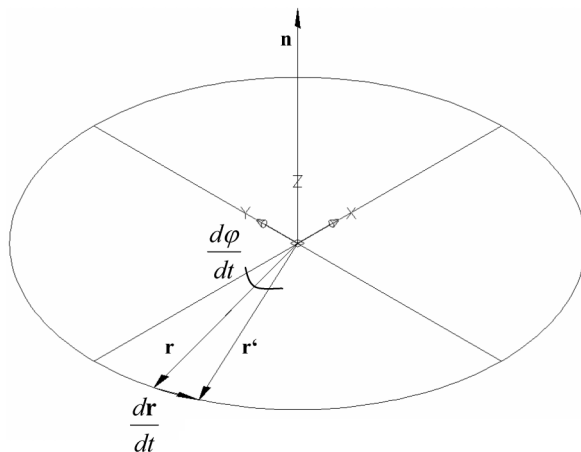
el. paštas: ???

Akselerometras – tai prietaisas, įgalinantis išmatuoti momentinio pagreičio projekciją akselerometro ašyje (jei akselerometras vienos ašies). Rinkoje esančių akselerometrų charakteristikos bei veikimo principas yra toli gražu nevienodi, tačiau dažniausiai pasitaikantys akselerometrai gana tiksliai gali išmatuoti pagreitį ribose $\pm 1g$ – $\pm 10g$. Prietaisų jautrumas priklauso nuo gamintojo bei kainos, kaip ir darbo dažnis. Verta tik paminėti, jog vienos ašies akselerometrai gali dirbti net iki 25kHz dažniu, o trijų ašių – iki 1–10kHz dažniu.

Modelio, kuriuo remiantis būtų galima „atstatyti“ taško judesio trajektoriją, sudarymas vykdomas trimis žingsniais. Pirmasis: sudarytas plokštuminės rotacijos modelis (1 pav.).

Nagrinėkime vektoriaus \mathbf{r} rotaciją plokštumoje apie vienetinio ilgio ašį \mathbf{n} . Atsižvelgę į kampinio greičio kryptį, gauname:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \hat{\mathbf{n}} \frac{d\varphi}{dt} \times \mathbf{r}. \quad (1)$$



1 pav. Plokštuminė rotacija.

Iš (1) matome, kad plokštuminei rotacijai apibūdinti reikalinga turėti kampo ϕ kitimo funkciją. Ją turėdami, vektorius \mathbf{r} padėtį galima rasti nesunkiai.

Dabar tarkime, jog rotacijos ašis \mathbf{n} yra vektorinė funkcija $\mathbf{n}(t)$ (2 pav.). Kaip pasikeis vektorius \mathbf{r} padėties kitimas?

Matyti, kad

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_\varphi}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_n}{dt}. \quad (2)$$

Pagal analogiją su (1)

$$\frac{d\mathbf{r}_\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \times \mathbf{r}. \quad (3)$$

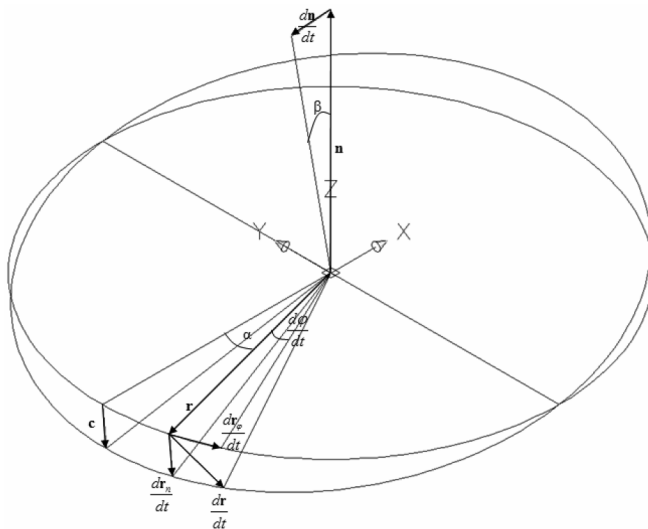
(3) išraiškoje ašis \mathbf{n} jau nebūtinai vienetinė, nes ji normuojama.

Kaip matyti 2 pav. vektoriai \mathbf{c} ir $\frac{d\mathbf{n}}{dt}$ yra vienoje plokštumoje ir vienas kitam statmeni. Be to, \mathbf{c} statmenas ir \mathbf{r} . Vadinasi \mathbf{c} kryptis sutaps su vektoriaus $\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{n}}{dt}$ kryptimi. Kadangi viskas nagrinėjama per nykstantai mažą laiką dt , todėl kampas β

$$\beta = \frac{|\frac{d\mathbf{n}}{dt}|}{|\mathbf{n}|}. \quad (4)$$

Tuomet vektoriaus \mathbf{c} ilgis

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{r}| \frac{|\frac{d\mathbf{n}}{dt}|}{|\mathbf{n}|}. \quad (5)$$



2 pav. Erdvinė rotacija.

Kampas α tarp vektorių $\frac{d\mathbf{n}}{dt}$ ir \mathbf{r} gali būti surastas iš

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt}}{|\mathbf{r}| \cdot \left| \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right|}. \quad (6)$$

Nesunku pastebėti, kad vektoriaus $\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$ modulis

$$\left| \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} \right| = |\mathbf{c}| \cos \alpha. \quad (7)$$

Išstatome (4) ir (5):

$$\left| \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} \right| = \frac{\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt}}{|\mathbf{n}|}. \quad (8)$$

Gauname galutinę išraišką, kuri apibūdina laisvą sukiojimąsi apie koordinatinių pradžios tašką:

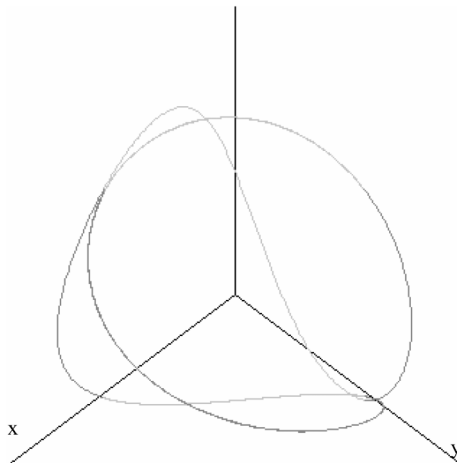
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \times \mathbf{r} - \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt}. \quad (9)$$

Modelio patikrinimui pasinaudosime programa (3 pav.). Pradines sąlygas ir naudojamus funkcijas imsime tokias:

$$\mathbf{n}(t) = [-\sin t \quad 0 \quad \cos t]^T \quad (10)$$

$$\mathbf{r} = [10 \quad 0 \quad 0]^T, \quad (11)$$

$$\varphi(t) = 2t. \quad (12)$$



3 pav. Vektoriaus \mathbf{r} trajektorija, kai dažnis 100Hz ir $t = 9,4248$ (žalia dalis, kai $z \geq 0$, raudona, kai $z < 0$).

Tęskime modelio nagrinėjimą. Pareikalaujame, jog rotacijos ašies ilgis bet kuriuo laiko momentu būtų lygus 1:

$$|\mathbf{n}(t)| = 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (13)$$

Tokiu atveju supaprastėja (3) išraiška, ir turime

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{n} \times \mathbf{r} - \mathbf{n} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right). \quad (14)$$

Gauta momentinio pagreičio išraiška

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = & \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{n} \times \mathbf{r} + \left(\frac{d\varphi}{dt} \frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \mathbf{r} - \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \mathbf{r} \cdot \frac{d^2\mathbf{n}}{dt^2} - \left(\frac{d\varphi}{dt} \mathbf{n} \times \mathbf{r} \right) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right) \mathbf{n} \\ & - \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right) \frac{d\mathbf{n}}{dt}. \end{aligned} \quad (15)$$

Gavome momentinio pagreičio išraišką, kuri leistų rasti pagreičio vektorių žinant kampo kitimo funkciją $\phi(t)$ bei rotacijos ašies vektorinę funkciją $\mathbf{n}(t)$. (14) aki-vaizdžiai per sudėtinga, jog galima būtų išspręsti atvirkštinį uždavinį: rasti $\phi(t)$ ir $\mathbf{n}(t)$ žinant pagreičio vektorių $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$. Sistema turi perdaug nežinomųjų, kad būtų vienareikšmiškai išspręsta. Darome išvada, jog reikalingas modelio papildymas.

Nagrinėtą erdvinės rotacijos modelį papildykime tarpusavyje statmenais ir statmenais \mathbf{r} vektoriais \mathbf{u} ir \mathbf{n} . Taip pat pareikalaujame, kad vektorių \mathbf{r} , \mathbf{n} ir \mathbf{u} moduliai būtų lygūs 1.

Iš erdvinės rotacijos modelio turime:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{n} \times \mathbf{r} - \mathbf{n} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right). \quad (16)$$

Kadangi $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = \mathbf{u}$, todėl

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{u} - \mathbf{n} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right). \quad (17)$$

Turėdami kampinio greičio funkciją bei vektoriaus \mathbf{n} greičio funkciją, galime rasti \mathbf{r} , \mathbf{u} padėtis remiantis šiomis išraiškomis:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{u} - \mathbf{n} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right), \quad (18)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \mathbf{r} - \mathbf{n} \left(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right). \quad (19)$$

Išdiferencijuojant (18) ir (19) laiko atžvilgiu, gauname pagreičių išraiškas:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = & \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{u} - \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{r} - 2\mathbf{n} \frac{d\varphi}{dt} \left(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right) \\ & - \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d^2\mathbf{n}}{dt^2} \right) \mathbf{n} - \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right) \frac{d\mathbf{n}}{dt}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = & -\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \mathbf{r} - \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{u} + 2\mathbf{n} \frac{d\varphi}{dt} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right) \\ & - \left(\mathbf{u} \cdot \frac{d^2 \mathbf{n}}{dt^2} \right) \mathbf{n} - \left(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right) \frac{d\mathbf{n}}{dt}. \end{aligned} \quad (21)$$

Naudodamiesi išvestomis išraiškomis, pilnai sumodeliuokime judesį, aprašomą (10)–(12) funkcijomis. Tam tikslui pasinaudosime programa (4 pav.).

Tarkime, jog mums yra žinomi šie dydžiai laiko momentu t :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}, \quad \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}, \quad \frac{d^2 \mathbf{n}}{dt^2}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dt}, \quad \mathbf{r}, \quad \mathbf{u}, \quad \mathbf{n}. \quad (22)$$

Keliama užduotis: rasti $\phi'(t)$, $\phi''(t)$ $\frac{d\mathbf{n}}{dt}$ vertes laiko momentu t . Kadangi mes nagrinėjame tik laiko momentą t , tuomet $\phi'(t)$ ir $\phi''(t)$ vertės yra tiesiog dvi konstantos. Nagrinėdami vieną laiko momentą, mes sąsąjį su kitais laiko momentais neturime, todėl galime šias dvi vertes laiko momentu t apibrėžti tiesiog kaip du nežinomuosius, ir jų atžvilgių išspręsti lygčių sistemą.

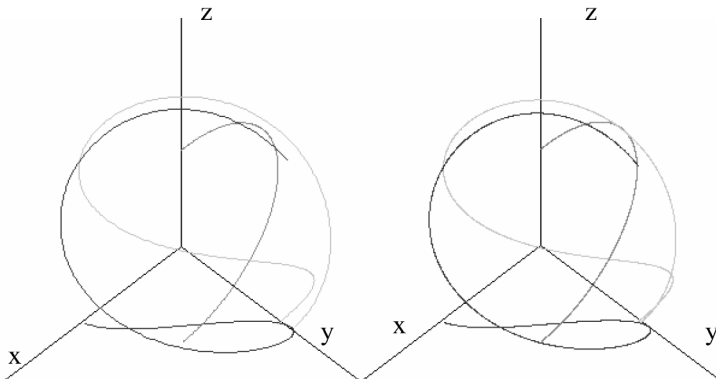
Apibrėžiam:

$$\phi'(t) = a, \quad (23)$$

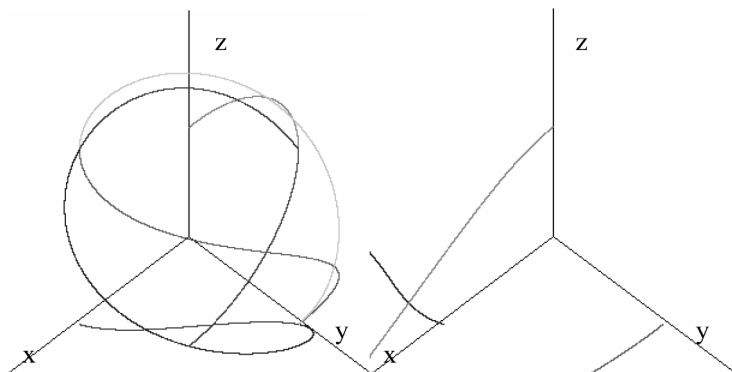
$$\phi''(t) = b. \quad (24)$$

Remiantis (20) ir (21) sudaroma sistema panaudojus apibrėžtas lygybes (23) ir (24) ir kintamųjų a ir b atžvilgiu sprendžiama iteraciniu Niutono metodu [4]. Tuomet suradus kampinio pagreičio bei kampinio greičio vertes, Rungės ir Kutos metodu sprendžiamos diferencialinės lygtys (18) ir (19), iš kur randami poslinkiai per integruojamą laiko intervalą. Tokiu būdu atkurta 5 pav. trajektorija galima dvejopa, nes sistemos realūs sprendiniai yra dveji.

Kadangi modelio prielaida yra ta, jog deformacijų nėra, tuomet pradinio taško dviprasmiškumą padeda išspręsti modelio geometrijos tikrinimas.



4 pav. \mathbf{r} (mėlyna), \mathbf{u} (žalia) ir \mathbf{n} (raudona) kreivės, kai $t = \pi$ ir dažnis 500Hz.



5 pav. r (mėlyna), u (žalia) ir n (raudona) kreivės, atkūrus judesį pagal pirmą ir antrą sprendinius.

Dabar leiskime iki šiol nagrinėtos sistemos centrui judėti laisvai erdvėje. Tokiu atveju turėsime dvis sistemas: globalią, kurios koordinatėmis bus gaunamas galutinis rezultatas, ir lokalią – kurios atžvilgiu vyksta laisvoji rotacija. Išsprendę minėtas sistemas lokaliuos koordinačių sistemos atžvilgiu gautus rezultatus „iššėmę“ iš bendrų pagreičio verčių, randame ir lokaliuos sistemos poslinkius.

Praktinio pritaikymo galimybės akivaizdžios: pasiekus pakankamai tikslų judesio atkūrimo mechanizmą, juo galima būtų pakeisti mobilias globalaus pozicionavimo sistemas į globalios stacionarios bei lokaliuos mobilios sistemos derinį taip sutaupant lėšų. Toks derinys galėtų būti panaudotas įvairių judančių objektų padėties sekimui (laivų, automobilių ir pan.), o kelių lokaliuos sistemų duomenimis vienam dideliam kūnui galima būtų daryti išvadas apie to judančio kūno deformacijas (pvz., tanklaivių).

Literatūra

1. Portalas www.mathworld.com
2. http://www.wilcoxon.com/vi_index.cfm/PD_ID=24
3. <http://www.memsic.com/memsic/pdfs/an-00mx-001.pdf>
4. K. Plukas, *Skaitiniai metodai*, Naujasis Lankas, Kaunas (2001).

SUMMARY

V. Benevičius, N. Listopadskis. Accelerometer application mathematical model

The positioning problem considered in this paper is an attempt to find system's of a few points position using accelerations. Today's industry provides with various types of accelerometers suitable for acceleration measure. That data may be used to trace object movement.

Final results showed that such movement trace is possible and may be applicable. The results also showed origins for errors which according to the results, are quite high globally. The final conclusion follows: the model created must be analyzed further in a deeper level, and error origins must be eliminated or at least minimized by either choosing different solving or modeling methods, either by revising used ones.

Keywords: positioning problem, accelerometer, system of differential equations, modeling.