Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 105–109

Delange lokalioji teorema Knopfmacherio aritmetinėje pusgrupėje

Rimantas SKRABUTĖNAS (VPU)
el. paštas: rimantas.skrabutenas@vpu.lt

Darbuose [3–5] esame pristatę rezultatus, kurie atsako į J. Knopfmacherio klausimus (Open Questions) apie aritmetinių funkcijų, apibrėžtų specialioje (J. Knopfmacherio) pusgrupėje G, reikšmių pasiskirstymą. Įrodytose lokaliosiose teoremose išryškintos ne tik analogijos su klasikiniu natūraliųjų skaičių pusgrupės atveju, bet ir specifiniai ypatumai.

Priminsime, kad adicinė aritmetinė pusgrupė G yra laisvoji komutatyvi pusgrupė (su vienetiniu elementu 1), kurią generuoja skaiti pirminių elementų aibė P. Aibėje G yra apibrėžta visiškai adityvioji *laipsnio funkcija* δ: $G \to N \cup \{0\}$ tokia, kad su kiekvienu $p \in P$, $\delta(p) \geqslant 1$ galioja aksioma.

AKSIOMA. *Egzistuoja tokios konstantos $A > 0$, $q > 1$ ir $0 \leqslant \nu < 1$, kad*

$$G(n) := Card\{a \in G;\ \delta(a) = n\} = Aq^n + \mathrm{O}(q^{\nu n}).$$

Šiame straipsnyje parodoma, kad, įrodinėjant ribines teoremas, tiriamųjų aritmetinių funkcijų klasę aprašančias sąlygas galima išnaudoti labiau, gaunant atitinkamos charakteristinės funkcijos asimptotinį skleidinį.

Kai tiriamųjų aritmetinių funkcijų g: $G \to C$ klasė aprašoma sąlyga *su visais galimais* $\nu \in C$

$$\sum_{p \in P, \delta(p)=l, g(p)=\nu} 1 = \pi(l)\big(\lambda_\nu + \rho_\nu(l)\big), \quad l \geqslant 1, \quad \pi(l) = \sum_{p \in G, \delta(p)=l} 1, \tag{1}$$

čia $\lambda_\nu \in [0, 1]$ – *konstantos, o* $\rho_\nu(l)$ – *liekamieji nariai*, tai [3] darbe parodėme, jog charakteristinės funkcijos asimptotiniame skleidinyje analiziniu metodu pavyksta išskirti pirmąjį narį, kai liekamieji nariai $\rho_\nu(l)$ tenkina gana negriežtas nykstamo mažėjimo sąlygas. Žinoma, tada ir ribinės teoremos galioja atitinkamoje siauroje zonoje.

Panagrinėkime savaip priešingą situaciją, kai liekanos $\rho_\nu(l)$ (1) sąlygoje, l augant, nyksta *pakankamai greitai.* Tarkime, kad egzistuoja tokia teigiama konstanta $\alpha < 1$, kad

$$\rho(n) := \sum_{k=1}^{n} q^k \sum_\nu \nu\rho_\nu(k) = Bq^{(1-\alpha)n}. \tag{2}$$

Iš čia, įprastu metodu, naudotu [3] straipsnyje, tirdami multiplikatyviųjų funkcijų, tenkinančių (1–2) sąlygas, sumos (charakteristinės funkcijos)

$$M_n(g) := \frac{1}{Aq^n} \sum_{m,\delta(m)=n} g(m)$$

asimptotiką, išvedame tokią, mūsų užduotyje – esminę informaciją apie tiriamosios funkcijos reikšmių pasiskirstymą G pirminių elementų aibėje P:

$$\sum_{k=1}^{n} k \sum_{\delta(p)=k} \big(g(p) - \chi\big) = \rho(n), \qquad \chi := \sum_{\nu} \nu\lambda_\nu. \tag{3}$$

Multiplikatyviųjų funkcijų g: $G \to C$, tenkinančių išvardintas sąlygas, klasę žymėkime $M_\alpha(G)$.

Naudosime darbuose [3–5] vartotus žymenis. Kai $g \in M_\alpha(G)$, tai

$$Z(y) := \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{a \in G, \delta(a)=n} 1 \Big) y^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - y^k)^{-\pi(k)};$$

$$F(y) := \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{\delta(a)=n} g(a) \Big) y^n =: Z^{\chi}(y) \exp\big\{L(y) - \chi L_0(y)\big\} H(y, g);$$

$$L(y) := L(y, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{\delta(p)=k} g(p)) \Big) y^k; \qquad L_0(y) := L(y, 1).$$

Sumuodami dalimis, gausime:

$$\begin{aligned} L(y) - \chi L_0(y) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\delta(p)=k} \big(g(p) - \chi\big) \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\rho(u) y^u}{u^2} \, du + (\log y) \int_1^{\infty} \frac{\rho(u) y^u}{u} \, du, \end{aligned} \tag{4}$$

todėl, remdamiesi (2–3) sąlygomis, formule (4) ir žinomomis funkcijos $Z(y)$ savybėmis, galime konstatuoti, kad egzistuoja tokia pakankamai maža teigiama konstanta $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$, kad funkcijos $H(y, g)$, $L(y) - \chi L_0(y)$ yra analiziškai pratęsiamos į skritulį $|\, y \,| \leqslant q^{-1+\varepsilon}$.

Sekdami straipsniais [1,3] ir pasinaudoję funkcijos $\rho(u)$ savybėmis (2–3), gausime formulę:

$$\exp\big\{L(y) - \chi L_0(y)\big\} = \exp\bigg\{ \int_1^{n} \frac{\rho(u) y^u}{u^2} \, du + (\log y) \int_1^{n} \frac{\rho(u) y^u}{u} \, du \bigg\} (1 + R(n)),$$

kurioje $R(n) = Bq^{-\alpha n}$. Ši formulė įgalina išskleisti generuojančią eilutę $F(y)$ dvinarių $(qy \pm 1)$ laipsniais. Narių skaičius skleidinyje yra fiksuotas, o liekamojo nario įvertis priklauso nuo konstantos α.

Toliau naudojame Košy formulę:

$$M_n(g) := \frac{1}{2\pi i A q^n} \int_{|y|=\rho} \frac{F(y)}{y^{n+1}} \, \mathrm{d}y.$$

Pagrindinį narį gausime integruodami integralus

$$\int_{J_0} \frac{\mathrm{d}y}{y^{n+1}(1 \pm qy)^{\pm\chi - k}}, \quad k = 0, 1, \ldots, r$$

pakankamai mažoje taško $y = q^{-1}$ ar atitinkamai (kai egzistuoja ypatingas funkcijos $Z(y)$ nulis, t.y. $I(G) = 1$), – taško $y = -q^{-1}$ aplinkoje J_0.

Dar pasinaudoję iš Stirlingo formulės išplaukiančiu įverčiu

$$\Gamma(\chi + n)\Gamma^{-1}(n) = n^\chi \left(1 + \sum_{k=1}^{r} a_k n^{-k} + B n^{-r-1}\right),$$

ir iš jo gaunamu sąryšiu

$$\binom{-\chi}{n} = \frac{(-1)^n n^{\chi-1}}{\Gamma(\chi)} \left(1 + \sum_{k=1}^{r} b_k n^{-k} + B n^{-r-1}\right)$$

išvedame tokį rezultatą:

1 TEOREMA. *Jei $g \in M_\alpha(G)$, $| g | \leqslant 1$, tai su bet kokiu fiksuotu $r \in N$*

$$M_n(g) = \sum_{k=1}^{r} \beta_k(q^{-1}, \chi) \frac{n^{\chi-k}}{\Gamma(\chi - k)} + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k(-q^{-1}, \chi) \frac{n^{-\chi-k}}{\Gamma(-\chi - k)} + B n^{-r-1+\mathrm{Re}\chi}.$$

Be to,

$$\beta_0(q^{-1}, \chi) = A^{\chi-1} H(q^{-1}, g), \quad \gamma_0(-q^{-1}, \chi) = I(G)(-1)^n \frac{A_1^\chi n^{-\chi-1}}{A} H(-q^{-1}, g).$$

Čia $A_1 := Z'(-q^{-1})q^{-1}$.

Taikant šį rezultatą ribinėse teoremose paprastai panaudojamas tik pirmasis gauto skleidinio narys. H. Delange [6] parodė paprastą idėją, kaip galima panaudoti ir visą asimptotinį skleidinį. Darbe [2] šiuo metodu yra įrodyta lokalioji ribinė teorema klasikiniu, natūraliųjų skaičių pusgrupės N atveju. H. Delange metodą galima taikyti ir dabar.

2 TEOREMA. *Tarkime $f \colon G \to N \cup \{0\}$ yra tokia adityvioji funkcija, kad su kompleksiniu skaičiumi z, $g := z^f \in M_\alpha(G)$. Tada su bet kokiais fiksuotais r, a:*

$$\frac{1}{Aq^n} \sum_{m, \delta(m)=n, f(m)=a} 1 = \sum_{k=0}^{r} \frac{P_k(q^{-1}, \log n, a)}{n^{k+1}} + \sum_{k=0}^{r} \frac{Q_k(-q^{-1}, \log n, a)}{n^{k+1}} + B n^{-r-1}.$$

Čia $P_k(q^{-1}, u, a)$, $Q_k(-q^{-1}, u, a)$ yra nedidesnio, kaip $a-1$ laipsnio polinomai nuo u, gaunami skleidžiant z laipsniais analizines funkcijas $n^{\chi} \cdot \beta_k(z) \cdot \Gamma^{-1}(\chi - k)$ ir atitinkamai, $-n^{-\chi} \cdot \gamma_k(z) \cdot \Gamma^{-1}(-\chi - k)$.

Įrodymo žingsniai. Iš 1 teoremos išplaukia, kad su $\chi = \chi(z) = \sum_k \lambda_k z^k$,

$$\frac{1}{Aq^n} \sum_{m, \delta(m)=n} z^{f(m)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\beta_k(q^{-1}, \chi) \cdot n^{\chi - k}}{\Gamma(\chi - k)} + \sum_{k=1}^{r} \frac{\gamma_k(-q^{-1}, \chi) \cdot n^{-\chi - k}}{\Gamma(-\chi - k)} + Bn^{-r-1+\mathrm{Re}\,\chi}. \tag{5}$$

Čia koeficientai $\beta_k(q^{-1}, \chi) =: \beta_k(z)$ ir $\gamma_k(-q^{-1}, \chi) =: \gamma_k(z)$ yra analizinės z funkcijos srityje $|z| < c$ su tam tikra teigiama konstanta c. Be to, tiek $\beta_k(z) \cdot \Gamma^{-1}(\chi - k)$, tiek ir $\gamma_k(z) \cdot \Gamma^{-1}(-\chi - k)$ lygios nuliui, kai $z = 0$. Todėl aplinkoje $|z| < c$ galioja asimptotiniai šių analizinių funkcijų skleidiniai:

$$\beta_k(z) \cdot \Gamma^{-1}(\chi - k) = \sum_{j=1}^{\infty} d_{kj} z^j \quad \text{ir} \quad \gamma_k(z) \cdot \Gamma^{-1}(-\chi - k) = \sum_{j=1}^{\infty} h_{kj} z^j.$$

Kita vertus, kairioji (5) formulės pusė yra polinomas z atžvilgiu, kuriame koeficientas prie z^a yra lygus

$$\frac{1}{Aq^n} \sum_{m, \delta(m)=n, f(m)=a} 1.$$

Kadangi

$$n^{\chi} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\log n)^j}{j!} \chi^j =: \sum_{j=0}^{\infty} v_j(\log n) z^j, \quad \text{o} \quad n^{-\chi} =: \sum_{j=0}^{\infty} w_j(\log n) z^j,$$

tai suma dešinėje (5) formulės pusėje išskleidžiama eilute z laipsniais. Koeficientas prie z^{α} yra lygus

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{P_k(q^{-1}, \log n, a) + Q_k(-q^{-1}, \log n, a)}{n^{k+1}},$$

o polinomai P_l, Q_l apibrėžiami lygybėmis

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j(\log n) z^j \cdot \sum_{j=1}^{\infty} d_{kj} z^j = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(q^{-1}, \log n, a) z^l,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} w_j(\log n) z^j \cdot \sum_{j=1}^{\infty} h_{kj} z^j = \sum_{l=0}^{\infty} Q_l(-q^{-1}, \log n, a) z^l.$$

Iš čia išplaukia, kad ir liekamąjį narį (5) formulėje taško $z = 0$ aplinkoje galima išskleisti eilute z laipsniais. Skleidinių koeficientai visais atvejais tenkina Košy nelygybes, todėl gauname teoremoje postuluojamą rezultatą.

Manau, kad, pagal analogiją su mano straipsniu [1], taip pat ir šiuo atveju galima gauti tolygų liekamojo nario įvertį, o 2 teoremą įrodyti susilpninant (2) sąlygą iki $\rho(n) := Bq^n n^{-M}$, kurioje M yra pakankamai didelis skaičius.

Literatūra

1. R. Skrabutėnas, Multiplikatyviųjų funkcijų sumų asimptotiniai skleidiniai, *Liet. matem. rink.*, **14**(2), 115–126 (1974) (in Russian).
2. R. Skrabutėnas, H. Delange teorema su liekamuoju nariu, *Liet. matem. rink.*, **17**(3), 119–120 (1977).
3. E. Manstavičius, R. Skrabutėnas, Summation of the values of multiplicative functions on semigroups, *Liet. matem. rink.*, **33**(3), 330–340 (1993) (in Russian).
4. R. Skrabutėnas, Local distributions of arithmetic functions on semigroups, in: *New Trends in Probab. and Stat.*, TEV, Vilnius VSP Utrecht, Tokyo (1997), pp. 363–370.
5. R. Skrabutėnas, Efektyvus liekamojo nario įverčio panaudojimas ribinėse teoremose, *Liet. matem. rink.*, **43**(spec. nr), 79–83 (2003).
6. H. Delange, Sur les formules de Atle Selberg, *Acta Arithmetica*, **19**(2), 105–146 (1971).

SUMMARY

R. Skrabutėnas. The local limit theorem of Delange in the Knopfmacher's semigroup

An asymptotic formula of the mean value of multiplicative arithmetic function from the class $M_\alpha(G)$ with asymptotical expansion of the main term is obtained. In the present paper the local limit theorem of the H. Delange type is proved.

Keywords: arithmetic function, asymptotic behaviour of mean values, limit distributions.