Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 164–168

Stacionariosios fazės metodo taikymas silpnai netiesinių hiperbolinių sistemų asimptotiniam sprendimui[1]

Aleksandras KRYLOVAS (VGTU)
el. paštas: akr@fm.vtu.lt

1. Nagrinėjama pirmosios eilės sistema su mažuoju parametru ε:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j(\varepsilon t)\frac{\partial u_j}{\partial x} = \varepsilon f_j(u_1, \ldots, u_n) \tag{1}$$

ir periodinėmis pradinėmis sąlygomis

$$u_j(0,x) = u_{0j}(x) \equiv u_{0j}(x+2\pi), \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

Šio straipsnio autoriaus ir A.Štaro darbe [1] buvo sukonstruotas (1), (2) uždavinio asimpotinis sprendinys

$$u_j = v_j(\tau, y_j) + \mathrm{O}(\varepsilon), \quad \tau = \varepsilon t, \ y_j = x - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{3}$$

tolygiai tinkamas, kai $t \in [0, \mathrm{O}(\varepsilon^{-1})]$. Asimptotinis sprendinys $V = (v_1, \ldots, v_n)$ buvo ieškomas, sprendžiant suvidurkintąją sistemą

$$\frac{\partial v_j}{\partial \tau} = \langle f_j(V)\rangle_j, \quad v_j(0, y_j) = u_{0j}(y_j), \ j = 1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

Čia funkcijos $f_j(V)$ vidurkinamos išilgai sistemos $\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j(0)\frac{\partial u_j}{\partial x} = 0$ charakteristikų. Šita (1) sistemos vidurkinimo schema bei jos matematinis pagrindimas pareikalavo [1] darbe stipraus apribojimo koeficientams $\lambda_j(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\lambda_i(\tau) - \lambda_j(\tau)}{\lambda_k(\tau) - \lambda_j(\tau)}\right) \equiv 0, \quad \forall i, j, k. \tag{5}$$

Taigi, [1] metodas taikytinas tik tuo atveju, kai visi koeficientai λ_j gali priklausyti iš esmės tik nuo vienos funkcijos $\alpha(\tau)$: $\lambda_j(\tau) = \lambda_j^0\alpha(\tau) + \lambda_0$.

---

[1]Šis darbas atliekamas pagal EUREKA programą (projektas OPTPAPER E!2623) ir yra remiamas Lietuvos Mokslų ir Studijų fondo (sutartis V04046).

Šiame straipsnyje (1) sistemos koeficientams $\lambda_j(\tau) \in C^1[0,\tau_0]$ pareikalaukime tokių apribojimų: su bet kuriais skirtingais indeksais j, s, p

$$\lambda_s(\tau) \neq \lambda_p(\tau), \quad W(\tau) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_j(\tau) & \lambda_s(\tau) & \lambda_p(\tau) \\ \frac{d\lambda_j(\tau)}{d\tau} & \frac{d\lambda_s(\tau)}{d\tau} & \frac{d\lambda_p(\tau)}{d\tau} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall \tau \in [0,\tau_0]. \tag{6}$$

Pastebėkime, kad (5) ir (6) sąlygos yra nesutaikomos ir todėl straipsnyje nagrinėjama nauja (1), (2) uždavinių klasė.

2. Tarkime, kad (1) sistemos funkcijos f_j turi pavidalą:

$$f_j(u_1,\dots,u_n) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} f_{jsp}(u_s,u_p), \quad j = 1,2,\dots,n. \tag{7}$$

Jau esant tokiems netiesiškumams, atsiranda problemos, būdingos (1), (2) uždavinio asimptotiniam integravimui. Iš kitos pusės, (7) sąlyga leidžia išvengti gremėzdiškų reiškinių ir išdėstyti siūlomo metodo esmę, apsiribojant kiek siauresniu (1), (2) uždavinio atveju. Paminėkime dar ir tai, kad (1) tipo modelio taikymai (žr. [2]) turi kvadratinius netiesiškumus.

Asimptotinio (1), (2), (7) uždavinio sprendinio ieškome, sudarant tokią integralinę diferencialinę sistemą

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial \tau} &= f_{jjj}(v_j,v_j) + \frac{1}{2\pi}\sum_{s\neq j}\int_0^{2\pi} f_{jsj}(v_s(\tau,y),v_j)\,\mathrm{d}y \\ &+ \frac{1}{2\pi}\sum_{p\neq j}\int_0^{2\pi} f_{jjp}(v_j,v_p(\tau,z))\,\mathrm{d}z \\ &+ \frac{1}{4\pi^2}\sum_{s\neq j}\sum_{p\neq j}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{jsp}(v_s(\tau,y),v_p(\tau,z))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \\ v_j(0,y_j) &= u_{0j}(y_j), \quad j = 1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{8}$$

3. Tarkime, kad funkcijos f_{jsp} ir u_{0j} yra tolydžiai diferencijuojamos. Tada (8) sistema turi vienintelį periodinį sprendinį $V = (v_1,\dots,v_n)$, $v_j(\tau,y_j) \equiv v_j(\tau,y_j+2\pi)$, $\tau \in [0,\tau_0']$. Konstanta $\tau_0' \leqslant \tau_0$, kaip ir visos kitos konstantos šiame darbe, nepriklauso nuo ε. Tikslusis (1), (2) uždavinio sprendinys $(u_1,\dots,u_n) = U(t,x;\varepsilon)$ egzistuoja, kai $t \in [0,\frac{\tau_0''}{\varepsilon}]$. Konstantą $\tau_0'' \leqslant \tau_0$, kur $\tau_0 = \min\{\tau_0',\tau_0''\}$ vėl žymėsime τ_0.

Nagrinėsime skirtumą tarp tiksliojo ir asimptotinio sprendinio: $r_j(t,x;\varepsilon) = u_j(t,x;\varepsilon) - v(\varepsilon t, x - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon t}\lambda_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau)$. Funkcijas r_j galima rasti iš sistemos

$$\frac{\partial r_j}{\partial t} + \lambda_j(\varepsilon t)\frac{\partial r_j}{\partial x} = \varepsilon\Big(\sum_{k=1}^{n} h_{jk}(t,x;\varepsilon)r_k + \mu_j(t,x;\varepsilon)\Big) \tag{9}$$

su nulinėmis pradinėmis sąlygomis:

$$r_j(0,x;\varepsilon) = u_j(0,x;\varepsilon) - v_j(0,x) = u_{0j}(x) - u_{0j}(x) \equiv 0. \tag{10}$$

(9) sistemos funkcijos h_{jk} standartiniu būdu išreiškiamos funkcijų f_j dalinėmis išvestinėmis, o funkcijos $\mu_j(t,x;\varepsilon)$ yra tokios:

$$\mu_j = \left(f_j(\ldots, v_k(\tau, y_k), \ldots) - \frac{\partial v_j}{\partial \tau} \right) \Bigg|_{\substack{\tau = \varepsilon t \\ y_k = x - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon t} \lambda_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau}} . \tag{11}$$

Kadangi visos (11) reiškinio funkcijos $v_k(\tau, y_k)$ yra periodinės, funkcijas μ_j galime išreikšti Furjė eilutėmis:

$$\mu_j \sim \sum_{l_s, l_p \in Z} \mu_{jl_pl_s}(\tau) \exp\{il_s y_s + il_p y_p\}, \qquad j,s,p = 1,2,\ldots,n. \tag{12}$$

Pareikalaukime funkcijų f_{jsp} ir u_{0j} glodumo, garantuojančio šių eilučių konvergavimą:

$$\sum_{l_s, l_p \in Z} \left(|l_s| + |l_p|\right) \cdot \left(\left|\mu_{jl_pl_s}(\tau)\right| + \left|\frac{d}{d\tau}\mu_{jl_pl_s}(\tau)\right| \right). \tag{13}$$

Integruodami (9), (10) sistemą išilgai charakteristikų $x - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon t} \lambda_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \mathrm{const}$, turime

$$r_j(t,x;\varepsilon) = \varepsilon \int_0^t \left(\sum_{k=1}^n h_{jk} r_k + \mu_j\left(\tilde{t}, x - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon \tilde{t}}^{\varepsilon t} \lambda_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau; \varepsilon\right) \right) \mathrm{d}\tilde{t} \tag{14}$$

Taikant (12) formulę (14) sistemai, gauname atskirų harmonikų integralus

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \int_0^t \mu_{jl_sl_p}(\varepsilon\tilde{t}) \exp\left(il_s\left(x - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon t} \lambda_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon\tilde{t}} \left(\lambda_j(\tau) - \lambda_s(\tau)\right)\mathrm{d}\tau \right) \right. \\
&\quad \left. + il_p\left(x - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon t} \lambda_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon\tilde{t}} \left(\lambda_j(\tau) - \lambda_p(\tau)\right)\mathrm{d}\tau \right) \right) \mathrm{d}\tilde{t} \\
&= \exp\left(i\left(l_s + l_p\right) y_j\right) \quad = \int_0^\tau \mu_{jl_sl_p}(\tilde{\tau}) \exp\left(i\frac{1}{\varepsilon}\delta_{jl_sl_p}(\tilde{\tau}) \right) \mathrm{d}\tilde{\tau}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Čia

$$\delta_{jl_sl_p}(\tau) = \int_0^\tau \left(l_s(\lambda_j(\tau) - \lambda_s(\tau)) + (l_p(\lambda_j(\tau) - \lambda_p(\tau)) \right) \mathrm{d}\tau. \tag{16}$$

Pastebėkime, kad suvidurkintoji (8) sistema sudaroma taip, kad (12) eilutė neturi tų narių, su kuriais $\delta_{jl_sl_p}(\tau) \equiv 0$. Pavyzdžiui, ten nėra nulinės harmonikos $l_s = l_p = 0$.

4. Tarkime, kad sveikieji skaičiai l_s ir l_p yra tokie:

$$\left|\delta'_{jl_sl_p}(\tau)\right| > \nu(\varepsilon). \tag{17}$$

Tada, integruodami dalimis paskutinį (15) reiškinio integralą, gauname

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^\tau \mu_{jl_sl_p}(\tau)\exp\left(\frac{i\delta_{jl_sl_p}(\tau)}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}\tau\right| \\ &\quad < \frac{\varepsilon}{\nu(\varepsilon)}\left(\left\|\mu_{jl_sl_p}\right\| + \left\|\mu'_{jl_sl_p}\right\|\left(|l_s|+|l_p|\right)\frac{\varepsilon}{\nu(\varepsilon)}\Lambda_1\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Čia $\|\cdots\|$ – funkcijų maksimumas intervale $\tau\in[0,\tau_0]$, konstanta $\Lambda_1 \geqslant \|\lambda'_j(\tau) - \lambda'_k(\tau)\|$. Pažymėkime visų, tenkinančių (17) sąlygą (12) eilutės harmonikų l_s, l_p aibę, H_ε. Iš (18) nelygybių bei (13) eilučių konvergavimo išplaukia, kad egzistuoja tokia teigiamoji konstanta c_0, kad

$$\left|\sum_{l_s,l_p\in H_\varepsilon}\exp\left(i(l_s+l_p)y_j\right)\int_0^\tau \mu_{jl_sl_p}(\tau)\exp\left(\frac{i\delta_{jl_sl_p}(\tau)}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant c_0\frac{\varepsilon}{\nu(\varepsilon)}. \tag{19}$$

5. Tarkime, kad (17) nelygybė negalioja, t. y. harmonikos $l_s, l_p \notin H_\varepsilon$. Pažymėkime $\delta'_{jl_sl_p} = \alpha$, $\delta''_{jl_sl_p} = \beta$ ir išnagrinėkime tiesinių lygčių sistemą

$$\left.\begin{aligned} l_s(\lambda_j(\tau)-\lambda_s(\tau)) + l_p(\lambda_j(\tau)-\lambda_p(\tau)) = \alpha, \\ l_s(\lambda'_j(\tau)-\lambda'_s(\tau)) + l_p(\lambda'_j(\tau)-\lambda'_p(\tau)) = \beta. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Iš (6) sąlygos išplaukia, kad (20) sistemos determinantas

$$\begin{vmatrix} \lambda_j-\lambda_s & \lambda_j-\lambda_p \\ \lambda'_j-\lambda'_s & \lambda'_j-\lambda'_p \end{vmatrix} \equiv W(\tau) \neq 0, \qquad \forall\tau\in[0,\tau_0]. \tag{21}$$

Tarkime, kad taškas τ' yra funkcijos $\delta'_{jl_sl_p}(\tau)$ lokalusis ekstremumas. Tada šiame taške (20) sistemos koeficientas $\beta = 0$ ir $|\alpha| > W_0/\Lambda_1$, konstanta $W_0 = \min_{\tau\in[0,\tau_0]}|W(\tau)| > 0$. Taigi (17) nelygybė negalioja tik stacionariojo taško s ($\delta'_{jl_sl_p}(s) = 0$) aplinkai. Tada (20) sistemoje $\alpha = 0$ ir $|\beta| > W_0/\Lambda_0 = \beta_0$, $\Lambda_0 \geqslant \|\lambda_j(\tau) - \lambda_k(\tau)\|$.

Kai $\alpha = 0$ nenuliniam (20) sistemos sprendiniui ($|l_s| + |l_p| \neq 0$) galioja lygybė $\varphi(\tau) \equiv \frac{\lambda_j-\lambda_s}{\lambda_j-\lambda_p} = -\frac{l_p}{l_s}$. Funkcija $\varphi(\tau)$ yra monotoninė: $\varphi'(\tau) = \frac{W(\tau)}{(\lambda_j-\lambda_p)^2} \neq 0$. Todėl funkcija $\delta'_{jl_sl_p}(\tau)$ gali turėti tik vieną stacionarųjį tašką $s\in(0,\tau_0)$. Taikydami stacionariosios fazės metodą, suskaidome integravimo intervalą į tris: $[0, s-\eta(\varepsilon)]$, $(s-\eta(\varepsilon), s+\eta(\varepsilon))$, $[s+\eta(\varepsilon),\tau_0]$. Tada pirmame ir trečiame intervale $|\delta'_{jl_sl_p}(\tau)| > \beta_0\eta(\varepsilon)$. Todėl, kartodami (18), (19) įvertinimus, gausime, kad egzistuoja tokios teigiamos konstantos c_1 ir c_2, kad

$$\left|\sum_{l_s,l_p\notin H_\varepsilon}\exp\left(i(l_s+l_p)y_j\right)\int_0^\tau \mu_{jl_sl_p}(\tau)\exp\left(\frac{i\delta_{jl_sl_p}(\tau)}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant c_1\frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)} + c_2\eta(\varepsilon). \tag{22}$$

6. Pastebėkime, kad (17) nelygybės funkciją $\nu(\varepsilon)$ galima pakeisti teigiamąja konstanta W_0/Λ_1, o (22) nelygybė galioja su bet kuria funkcija $0 < \eta(\varepsilon) < \tau/2$. Todėl pasirinkę $\eta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$, turime įvertį

$$r_j(t, x; \varepsilon) = \varepsilon\left(\sum_{k=1}^{n} \int_0^t h_{jk} r_k \, \mathrm{d}\tilde{t}\right) + \mathrm{O}(\sqrt{\varepsilon}). \tag{23}$$

Iš čia pagal žinomą Gronvalo lemą (žr. [3]) išplaukia, kad egzistuoja tokios teigiamos konstantos τ^0 ir c_3, kad

$$\left|r_j(t, x; \varepsilon)\right| < c_3\sqrt{\varepsilon}, \forall t \in \left[0, \frac{\tau^0}{\varepsilon}\right], \quad x \in [0, 2\pi].$$

Suformuluokime pagrindinį šio darbo rezultatą.

Teorema. *Jei* (1), (2), (7) *sistemai galioja* (6) *apribojimai, tai suvidurkintosios (8) sistemos sprendinys yra tolygiai tinkamoji, kai* $t \in [0, \mathrm{O}(\varepsilon^{-1})]$, *asimptotika*

$$u_j = v_j(\tau, y_j) + \mathrm{O}(\sqrt{\varepsilon}), \quad \tau = \varepsilon t, \ y_j = x - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{24}$$

Lygindami gautąją asimtotiką (24) su anstesniąja (3), matome blogesnes pastarosios savybes: netiktis čia yra $\mathrm{O}(\sqrt{\varepsilon})$, o ne $\mathrm{O}(\varepsilon)$. Tai sąlygota ne taikomu metodu, o nagrinėjama naująja uždavinių klase. Pats išdėstytas šiame straipsnyje metodas taikytinas ir netikties $\mathrm{O}(\varepsilon)$ atveju. Tada visos (12) eilutės harmonikos $l_s, l_p \in H_\varepsilon$ ir (22) įverčių nereikia. Pastebėkime dar, kad be esminų pakeitimų metodą galima taikyti, jei (6) sąlygos nelygybę $\lambda_s(\tau) \neq \lambda_p(\tau)$ pakeisti tokiu reikalavimu: lygtys $\lambda_s(\tau) = \lambda_p(\tau)$, kai $s \neq p$, gali turėti baigtinį skaičių sprendinių. (7) sąlygos funcijos f_{jsp} gali priklausyti ne tik nuo u_s ir u_p, bet ir nuo u_j. Bendrasis atvejis $f_j(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ yra sunkesnis tik atsirandant techninėms, bet ne principinėms problemoms.

Literatūra

1. A. Krylovas, A. Štaras, Asimptotinis silpnai netiesinių sistemų su lėtai kintančiais koeficientais integravimas, *Liet. matem. rink.*, **24**(2), 90–96 (1984).
2. A. Krylovas, R. Čiegis, Examples of asymptotic analysis of hyperbolics equations, in: *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2002*, A. Buikis, R. Čiegis, A. D. Fitt (Eds.), Berlin, Springer-Verlag (2003), pp. 315–320.
3. A. Krylovas, Vidinio vidurkinimo išilgai charakteristikų metodo pagrindimas silpnai netiesinėms sistemoms. I, *Liet. matem. rink.*, **29**(4), 721–732 (1989).

SUMMARY

A. Krylovas. Application of the method of stationary phase to weakly nonlinear hyperbolic systems asymptotic solving

Method of averaging of first order hyperbolic system with small parameter is presented. The mathematic investigate of this method is based on the method of stationary phase.

Keywords: hyperbolic systems, asymptotics, averaging, small parameter, weakly nonlinear.