

Геометрия полунеголономных гиперкомплексов $SNGr(1, 4, 5)$ четырехмерного проективного пространства

Казимерас НАВИЦКИС (VU)

e-mail: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Резюме. Рассматриваются различные внутренние оснащения полунеголономных гиперкомплексов $SNGr(1, 4, 5)$ пространства P_4 .

Ключевые слова: многообразиие Грассмана, распределение двумерных плоскостей, оснащение распределения.

Пусть четырехмерное действительное проективное пространство P_4 отнесено к подвижному реперу $\{A_i\}$, дифференциальные уравнения инфинитезимального смещения которого имеют вид $(i, j, \dots = 1, \dots, 5)$

$$dA_i = \omega_i^j A_j.$$

Пусть $Gr(1, 4)$ – многообразиие Грассмана всех прямых пространства P_4 . Сопоставляя каждой прямой $l \in Gr(1, 4)$ двумерную плоскость Π , проходящую через эту прямую l , мы получаем некоторое распределение (поле), которое называется полунеголономным гиперкомплексом $SNGr(1, 4, 5)$. Пусть репер $\{A_i\}$ выбран так, чтобы $l = (A_1 A_2)$, $\Pi = (l A_5)$. Тогда в частично канонизированном репере рассматриваемый гиперкомплекс определится следующими дифференциальными уравнениями

$$\omega_5^\alpha = \lambda_\beta^{\alpha p} \omega_p^\beta + \lambda^{\alpha p} \omega_p^5, \quad (1)$$

где величины $\lambda_\beta^{\alpha p}$ и $\lambda^{\alpha p}$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \lambda_\beta^{\alpha p} - \lambda_\beta^{\alpha p} \omega_5^5 - \lambda^{\alpha p} \omega_\beta^5 - \delta_\beta^\alpha \omega_5^p = \lambda_{\beta\gamma}^{\alpha pq} \omega_q^\gamma + \lambda_\beta^{\alpha pq} \omega_q^5,$$

$$\nabla \lambda^{\alpha p} - 2\lambda^{\alpha p} \omega_5^5 = \bar{\lambda}_\beta^{\alpha pq} \omega_q^\beta + \lambda^{\alpha pq} \omega_q^5$$

(соответствующие внешние квадратичные уравнения опускаются).

Величина $\Lambda = \det \|\lambda^{\alpha p}\|$ является относительным инвариантом, так как $(p, q, \dots = 1, 2; \alpha, \beta, \dots = 3, 4)$

$$d \ln \Lambda + \omega_p^p + \omega_\alpha^\alpha - 4\omega_5^5 = \Lambda_\alpha^p \omega_p^\alpha + \Lambda^p \omega_p^5.$$

Предполагая, что $\Lambda \neq 0$, введем следующий объект:

$$\mu_{p\alpha} = \frac{\partial \ln |\lambda|}{\partial \lambda^{\alpha p}}.$$

Компоненты этого объекта удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \mu_{p\alpha} + 2\mu_{p\alpha} \omega_5^5 = \mu_{p\alpha\beta}^q \omega_q^\beta + \mu_{p\alpha}^q \omega_q^5.$$

Распределение (1) будем называть оснащенным (или нормализованным) в смысле Нордена–Гринцевичюса, если к каждой прямой l этого распределения присоединены два подпространства

$$\Pi_I(l) : x^5 = \lambda_\alpha x^\alpha \quad (2)$$

(нормальное пространство первого рода) и

$$\Pi_{II}(l) : x^p = \lambda^p x^p, \quad x^\alpha = 0$$

(нормальное пространство второго рода) проективного пространства P_4 .
Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Уравнения

$$q^p = -\frac{1}{2}(\lambda_\alpha^{\alpha p} + \lambda_\alpha \lambda^{\alpha p})$$

устанавливают соответствие между нормальными пространствами $\Pi_I(l)$ и $\Pi_{II}(l)$.

Систему величин

$$t_\alpha = \frac{1}{2} \lambda_\alpha^{\beta p} \mu_{p\beta}$$

будем называть квазинормальным пространством.
Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Геометрические объекты

$$l^p = \frac{2}{3}(\lambda^{\alpha p} t_\alpha - \lambda_\alpha^{\alpha p})$$

и

$$H_\alpha = -\left(\frac{1}{2} l^p \mu_{p\alpha} + t_\alpha\right)$$

определяют внутренние нормальные пространства.

Система величин

$$T_\alpha = \mu_{p\alpha}^p + \mu_{p\alpha} \lambda_\beta^{\beta p} - 3H_\alpha + 6\mu_{p\alpha} l^p$$

образует тензор, так как

$$\nabla T_\alpha + T_\alpha \omega_5^5 = T_{\alpha\beta}^p \omega_p^\beta + T_\alpha^p \omega_p^5.$$

Пусть σ – любой абсолютный инвариант распределения (1). Пучок геометрических объектов

$$H_\alpha(\sigma) = H_\alpha + \sigma T_\alpha$$

определяет пучок нормальных пространств первого рода.

Положим

$$\tau^p = -\frac{1}{2} \lambda^{\alpha p} T_\alpha.$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Пучок геометрических объектов $l^p(\sigma) = l^p + \sigma \tau^p$ определяет пучок нормальных пространств второго рода.*

Распределение (1) будем называть оснащенным в смысле Э. Картана, если каждой прямой l этого распределения отнесена прямая

$$C(l) : x^p = m_\alpha^p x^\alpha, \quad x^5 = m_\alpha x^\alpha.$$

Характеристика гиперплоскости (2), когда прямая l описывает линейчатую поверхность

$$L : \omega_p^\alpha = l_p^\alpha \Theta, \quad \omega_p^5 = \tilde{l}_p \Theta,$$

определяется уравнениями

$$x^5 = \lambda_\alpha x^\alpha,$$

$$[(\lambda_{\alpha\beta}^p - \lambda_\alpha \lambda_\gamma \lambda^{\gamma p}) l_p^\beta + (\lambda_\alpha^p - \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda^{\beta p}) \tilde{l}_p] x^\alpha + (\tilde{l}_p - \lambda_\alpha l_p^\alpha) x^p = 0. \quad (3)$$

Если линейчатая поверхность L такова, что $\tilde{l}_p = \lambda_\alpha l_p^\alpha$, то уравнения характеристики (3) принимает вид:

$$x^5 = \lambda_\alpha x^\alpha, \quad \tilde{H}_{\alpha\beta}^p l_p^\beta x^\alpha = 0,$$

где

$$\tilde{H}_{\alpha\beta}^p = \lambda_{\alpha\beta}^p + \lambda_\alpha^p \lambda_\beta - \lambda_\alpha \lambda_\gamma \lambda_\beta^{\gamma p} - \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma \lambda^{\gamma p}.$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Тензор $\tilde{H}_{\alpha\beta}^P$ определяет соответствие между точками гиперплоскости (2), точкой $a_p x^P = 0$, $x^I = 0$ и точками копрямой $u_p = 0$, $T^I u_I = 0$ ($I = 3, 4, 5$):

$$\tilde{H}_{\alpha\beta}^P x^\alpha T^\beta a_p = 0. \quad (4)$$

Соответствие (4) симметрично относительно величин x^α и T^β тогда и только тогда, когда

$$\tilde{H}_{[\alpha\beta]}^P p^{\alpha\beta} a_p = 0, \quad (5)$$

где $p^{\alpha\beta} = x^\alpha T^\beta - x^\beta T^\alpha$. Соответствие (5) не зависит от выбора точки $a_p x^P = 0$, $x^I = 0$, если

$$\tilde{H}_{[\alpha\beta]}^P p^{\alpha\beta} = 0. \quad (6)$$

Уравнения (6) определяют инвариантный двумерный линейный комплекс прямых. Уравнения

$$\tilde{H}_{(\alpha\beta)}^P x^\alpha x^\beta = 0$$

определяют инвариантный двумерный конус второго порядка.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Геометрический объект $\{H_\alpha, \bar{H}_\alpha^P\}$, где

$$\bar{H}_\alpha^P = H_\alpha H_\beta \lambda^{\beta P} - H_\alpha^P,$$

определяет внутреннее оснащение распределения (1) в смысле Э. Картана.

REZIUOMĖ

K. Navickis. Pusiauneholonominių keturmatės projektyvinės erdvės hiperkompleksų $SNGr(1,4,5)$ geometrija

Nagrinėjami erdvės P_4 pusiauneholonominių hiperkompleksų $SNGr(1,4,5)$ įvairūs vidiniai papildymai.

SUMMARY

K. Navickis. Geometry of semi-nonholonomic hypercomplexes $SNGr(1,4,5)$ in a four-dimensional projective space

In this article the problem of intrinsic normalizations of plane distributions in an four-dimensional projective space is considered.

Keywords: Grassman manifold, projectiv relation, complex if straight lines.