Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 202–205

Геометрия неголономных комплексов $NGr(1,4,4)$ четырехмерного аффинного пространства

Казимерас НАВИЦКИС (VU)
e-mail: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Резюме. Рассматриваются различные вопросы дифференциальной геометрии неголономных комплексов $NGr(1,4,4)$ четырехмерного аффинного пространства.

Ключевые слова: многообразие Грассмана, проективное соответствие, комплекс прямых.

Рассмотрим четырехмерное подмногообразие $Gr(1,4,4)$ шестимерного многообразия Грассмана $Gr(1,4)$ всех прямых четырехмерного аффинного пространства A_4. Пусть $\{A,\vec{e}_i\}$ – подвижной репер пространства $A_4(i,j,k,\ldots=1,\ldots,4)$. Инфинитезимальное смещение такого репера определяется уравнениями

$$d\vec{A}=\omega^i\vec{e}_i,\ d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j.$$

Пусть l – образующий элемент многообразия $Gr(1,4)$. Будем считать, что прямая l имеет направление вектора $\vec{e}_1$, а A лежит на l. В репере первого порядка дифференциальные уравнения комплекса $Gr(1,4,4)$ запишем в виде:

$$\begin{cases}\omega_1^2+\omega^3=0,\\ \omega_1^3+\omega^4=0\end{cases} \tag{1}$$

(соответствующие внешние квадратичные уравнения опускаются).

Геометрическим местом прямых, проходящих через фиксированную точку $\vec{M}(t)=\vec{A}+t\vec{e}_1$ прямой l и принадлежащих комплексу $Gr(1,4,4)$, является конус $\Gamma_2(t)$ с вершиной в точке $\vec{M}(t)$. Касательной плоскостью $\Pi_2(t)$ конуса $\Gamma_2(t)$ вдоль образующей l является плоскость

$$\Pi_2(t):\ x^2=tx^3,\ x^3=tx^4.$$

Плоскость $\Pi_2(t)$ назовем ассоциированной плоскостью точки $\vec{M}(t)$ прямой l, принадлежащей комплексу (1). Соответствие

$$K_1(l):\ \vec{M}(t)=\vec{A}+t\vec{e}_1\leftrightarrow\Pi_2(t) \tag{2}$$

между точками $\vec{M}(t)$ прямой l и плоскостями $\Pi_2(t)$, проходящими через прямую l, будем называть основным соответствием комплекса $Gr(1,4,4)$.

Когда точка $\vec{M}(t)$ пробегает прямую l, плоскости $\Pi_2(t)$ меняются и описывают гиперконус

$$K_3:\ x^2x^4-(x^3)^2=0$$

второго порядка с вершиной l. Основное соответствие (2) порождает соответствие

$$\left(\vec{M}(t_1),\ \vec{M}(t_2)\right)\leftrightarrow\Pi_3(t_1,t_2),$$

сопоставляющее двум точкам $\vec{M}(t_1)$ и $\vec{M}(t_2)$ прямой l гиперплоскость

$$\Pi_3(t_1,t_2):\ x^2-(t_1+t_2)x^3+t_1t_2x^4=0,$$

проходящую через прямую l. В предельном случае, когда $t_2\to t_1=t$, получаем гиперплоскость

$$\Pi_3(t):\ x^2-2tx^3+t^2x^4=0$$

и соответствующее соответствие

$$K_2(l):\ \vec{M}(t)\leftrightarrow\Pi_3(t).$$

Неголономным комплексом $NGr(1,4,4)$ назовем многообразие Грассмана $Gr(1,4)$ вместе с полем соответствий $K_1(l)$. Условия стационарности прямой l и инвариантности соответствия $K_1(l)$ определяются вполне интегрируемой системой $(p,q,\dots,p_1,p_2,\dots=1,2;\ I,J,\dots=2,3,4)$

$$\theta_{p_1p_2}=0,\quad \theta_{p_1\cdots p_4}=0,\quad \omega^I=0,\quad \omega_1^I=0$$

(1-формы $\theta_{p_1p_2}$, $\theta_{p_1\cdots p_4}$ симметричные относительно всех индексов), где

$$\begin{aligned}
&4\theta_{11}=4\omega^1-\omega_3^2-2\omega_4^3,\\
&4\theta_{12}=2\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_4^4,\\
&\theta_{22}=\omega_3^4+2\omega_2^3,\\
&\theta_{1111}=\omega_4^2,\quad 4\theta_{1112}=\omega_3^2-2\omega_4^3,\\
&6\theta_{1122}=\omega_2^2-2\omega_3^3+\omega_4^4,\\
&4\theta_{1222}=\omega_3^4-2\omega_2^3,\quad \theta_{2222}=\omega_2^4.
\end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения неголономного комплекса $NGr(1,4,4)$ в частично канонизированном репере запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\theta_{p_1p_2}&=L_{p_1p_2,I}\,\omega^I+M_{p_1p_2,I}\,\omega_1^I,\\
\theta_{p_1\cdots p_4}&=L_{p_1\cdots p_4,I}\,\omega^I+M_{p_1\cdots p_4,I}\,\omega_1^I,
\end{aligned}$$

где соответствующие внешние квадратичные уравнения опускаются.

Имеет место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Дифференциально-геометрический объект*

$$\{L_{p_1p_2,I},\ L_{p_1\cdots p_4,I},\ M_{p_1p_2,I},\ M_{p_1\cdots p_4,I}\}$$

алгебраически подобен дифференциально-геометрическому объекту

$$\{A_{p_1\cdots p_5},\ A_{p_1p_2p_3},\ \widetilde{A}_p,\ \widetilde{C}_{p_1p_2p_3},\ C_p,\ B_{p_1\cdots p_7},$$
$$B_{p_1\cdots p_5},\ B_{p_1p_2p_3},\ B_p,\ C_{p_1\cdots p_5},\ C_{p_1p_2p_3}\}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Система величин* $B_{p_1\cdots p_7}$ *является тензором и определяет семь точек на прямой* l

$$B_{p_1\cdots p_7}t^{p_1}\cdots t^{p_7}=0$$

(инфлекционные центры; здесь положено $t=t^2:t^1$*).*

ТЕОРЕМА 3. *Система 1-форм* $\omega_1^2+\omega^3$, $\omega_1^3+\omega^4$ *является вполне интегрируемой тогда и только тогда, когда все компоненты геометрических объектов* g_p, $g_{p_1p_2p_3}$, $g_{p_1\cdots p_5}$ *равны нулю; здесь*

$$2g_p=A_p+5B_p,\ 2g_{p_1p_2p_3}=2A_{p_1p_2p_3}-3B_{p_1p_2p_3},$$
$$2g_{p_1\cdots p_5}=A_{p_1\cdots p_5}+7B_{p_1\cdots p_5}.$$

ТЕОРЕМА 4. *Система 1-форм*

$$\omega^2,\quad \omega_1^2-2\omega^3,\quad \omega^4-2\omega_1^3,\quad \omega_1^4$$

является вполне интегрируемой тогда и только тогда, когда все компоненты геометрического объекта

$$f_{p_1p_2p_3}=2(5C_{p_1p_2p_3}+\widetilde{C}_{p_1p_2p_3})$$

равны нулю.

Положим

$$2L_p=A_p-3B_p,$$
$$2L_{p_1p_2p_3}=2A_{p_1p_2p_3}+9B_{p_1p_2p_3}.$$

Рассмотрим линейчатую поверхность $L:\ \omega^I=l^I$, $\omega_1^I=l_1^I\theta$ $(D\theta=0)$ пространства A_4, для которой

$$l_1^2+l^3=0,\quad l_1^3+l^4=0,$$

т.е. интегральную линейчатую поверхность комплекса $NGr(1,4,4)$.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Линейный комплекс*

$$p^2 + p^{31} = (L_{122} - 2L_2)p^{23} + (L_{112} - L_1)p^{24} + L_{111}p^{34},$$

$$p^3 + p^{41} = -L_{222}p^{23} - (L_{122} + L_2)p^{24} - (L_{112} + 2L_1)p^{34}$$

является инвариантным и имеет касание первого порядка с любой интегральной линейчатой поверхностью L. *Особой плоскостью этого линейного комплекса является плоскость*

$$\Pi_2 : \begin{cases} -L_{222}x^2 + (L_2 - 2L_{122})x^3 + (L_1 - L_{112})x^4 = 1, \\ (L_2 + L_{122})x^2 + (L_1 + 2L_{112})x^3 + L_{111}x^4 = x^1. \end{cases}$$

Неголономный комплекс $NGr(1,4,4)$ *назовем оснащенным (или нормализованным), если на этом комплексе определено поле инвариантных плоскостей*

$$\Pi_2(l) : \ h_I x^I = 1, \quad H_I x^I = x^1.$$

Примерами внутренних оснащений являются поле плоскостей Π_2, а также поле плоскостей

$$\begin{cases} -6B_{222}x^2 - (6B_{112} + 4B_1)x^3 - (12B_{122} + 4B_2)x^4 = 1, \\ (6B_{122} - 4B_2)x^2 + 6B_{111}x^3 + (12B_{112} - 4B_1)x^4 = x^1. \end{cases}$$

В данной работе геометрическим путем построены различные внутренние оснащения рассматриваемого неголономного комплекса.

REZIUMĖ

K. Navickis. Keturmatės afininės erdvės neholonominių kompleksų NGr(1,4,4) geometrija

Nagrinėjami keturmatės afininės erdvės neholonominių kompleksų NGr(1,4,4) įvairūs diferencialinės geometrijos klausimai.

SUMMARY

K. Navickis. Geometry of non-holonomic complexes $NGr(1,4,4)$ ***in a four-dimensional affine space***

In this article intrinsic normalizations of a non-holonomic complexes in affine space A_4 is constructed in an invariant form.

Keywords: Grassman manifold, distribution of two-dimensional planes, equipment of distribution.