*Liet. matem. rink.*, **44**, *spec. nr.*, 2004, 206–208

# О некоторых кардинальных инвариантах экспоненты в топологиях Шаботи

Гинтарас ПРАНИНСКАС (KU)
e-mail: jelenagl@mail.ru

**Резюме.** В статье исследуется взаимно-отношения между кардинальными инвариантами базисного топологического пространства с топологиями типа Шаботи, таких как вес, псевдовес, сетевой вес. Доказано что для экспоненты в топологии Вьеториса псевдовес экспоненты не превышает веса исходного пространства. Для локально компактных пространств вес экспоненты совпадает с весом базисного пространства.

*Ключевые слова:* топологическое пространство, топология, экспонента, топология Шаботи, топология Вьеториса.

В статье все пространства считаем хаусдорфовыми. Точками пространства $\exp X$ топологического пространства $X$ являются непустые замкнутые подмножества, причем, подмножеству $F \subset X$ соответствует точка $(F) \in \exp X$.

*Определение* 1. Для $X$ определим подмножество $\exp X\langle V_0, V_1, ..., V_m\rangle = \{(F) \in \exp X: \ F \subset V_0, \ F \cap X_i \neq \emptyset, \ i = 1, ..., m\}$.

*Замечание 1.* Если $\tau$ некоторая топология на пространстве $X$ и семейство $\tau^* \subset \tau$ замкнуто относительно конечных пересечений, то в определении 1 беря $V_0 \in \tau^*$, $V_i \in \tau$, $i = 1, ..., m$, когда $V_0$ пробегает всевозможные значения так же как и $V_i \in \tau$ получаем базу некоторой топологии на $\exp X$ которую называет топологией типа Шаботи ($(\tau^*, \tau)$-топологией). Так же заметим, что когда $\tau^* = \tau$ топология типа Шаботи совпадает с Вьеторисовской топологией на $\exp X$ и если $\tau^* = \tau_c = \{u : X\backslash u\}$, то $(\tau_c, \tau)$ топология называется просто топологией Шаботи. Топологии Шаботи впервые возникли у Шаботи при определении сходимости решеток. Так же рассматривались в работах Флексшсера [4], а в общем виде начаты рассматриваться автором [5].

Далее если отдельно неоговорено будет предпологаться, что пространство $\exp X$ наделено топологией Вьеториса. Все понятия используются в том же смысле что и в [2].

ТЕОРЕМА 1. *Псевдовес $pw(\exp X)$ экспоненты регулярного топологического пространства $X$ не превышает веса $w(X)$ пространства $X$, т.е. $pw(\exp X) \leqslant w(X)$.*

*Доказательство.* Пусть $\bar{\beta} = \{\bar{u}: u \in \beta\}$ где $\beta$ открытая база пространства $X$ мощности $w(X)$ и рассмотрим открытое семейство подмножеств $\exp X$ $\langle X \backslash A, V\rangle$, где $A \in \bar{\beta}$, $V \in \beta$. Предположим $(F) \in \exp X$ произвольно выбранная точка. Тогда $\{\langle X\backslash H, V\rangle\}$, где $H \in \bar{\beta}$, $H \subset X\backslash F$, $V \in \beta$ и $V \cap F \neq 0$ псевдобаза пространства $\exp X$ в точке $(F)$. Действительно $X\backslash F = \cup\{H \in \bar{\beta}: H \subset X\backslash F\}$ и для каждого замкнутого $F_1$: $F_1 \subset F$ существует $V \in \beta$ чтобы $F \cap V \neq 0$ и $F_1 \cap V = \emptyset$. Теорема доказана.

*Замечание* 2. Псевдохарактер $\psi((X), \exp X)$ точки $(x) \in \exp X$ равен $\pi$-весу $\pi w(X)$ пространства $X$. Действительно, если $\pi\beta = \{V\}\pi$-база пространства $X$ мощности $\pi w(X)$, то $\{\langle X, V\rangle : \langle V \in \pi\beta\rangle\}$ псевдобаза мощности не привышающей $\pi w(X)$. С другой стороны, если $\{\langle X, V_1^\alpha, ..., V_{m_\alpha}^\alpha\rangle, \alpha \in I\}$ псевдобаза точки $(X)$ в $\exp X$, то $\{V_j^\alpha : j = 1, ..., m_\alpha, \ \alpha \in I\}$ $\pi$-база $X$ и $\psi((X), \exp X) \geqslant \pi w(X)$.

ТЕОРЕМА 2. *$\pi$-вес $\pi w(X)$ пространства $X$ равен $\pi$-весу $\pi w(\exp X)$ пространства $\exp X$.*

*Доказательство.* Пусть $\pi\beta$ $\pi$-база пространства $X$ веса $\pi w(X)$ тогда всевозможные подмножества $\langle \bigcup_{i=1}^m V_i, V_1, ..., V_m\rangle$, где $V_i \in \pi\beta$, $i = 1, ..., m$ образуют $\pi$-базу пространства $\exp X$ веса $\leqslant \pi w(X)$.

Далее пусть $\{\langle V^\alpha, V_1^\alpha, ..., V_m^\alpha\rangle : \alpha \in I\}$ $\pi$-база пространства $\exp X$ мощности $\pi w(\exp X)$, тогда $\{V^\alpha\}$, где $V^\alpha = \bigcup_{j=1}^m V_j^\alpha$ для каждого $\alpha \in I$ образует $\pi$-базу пространства $X$. Следовательно $\pi w(\exp X) \geqslant \pi w(X)$. Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Число Суслина пространства $\exp X$, $c$ $(\exp X)$ меньше $\pi$-веса $\pi w(X)$ пространства $X$.*

ТЕОРЕМА 3. *Плотность пространства $\exp X$, $d(\exp X)$ не превышает плотности пространства $X$, $d(X)$.*

*Доказательство.* Для любого всюду плотного множества $A$ в $X$ множество конечных подмножеств $C_0(A)$ всюду плотно в $\exp X$ следовательно $d(\exp X) \leqslant d(X)$. Доказательство завершено.

**Следствие 2.** $\exp X$ *сепарабельно, если $X$ сепарабельно.*

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $X$ регулярное топологическое пространство, а пространство $\exp X$ наделено топологией Шаботи. Тогда сетевой вес $nw(\exp X)$ пространства $\exp X$, не превышает веса $w(X)$ пространства $X$.*

*Доказательство.* Пусть $\beta = \{V\}$ база пространства $X$ веса $w(X)$. Тогда семейство $\{\langle X\backslash(\bigcup_{j=1}^n U_j), V_1, ..., V_m\rangle\}$, где $U_j, V_i \in \beta$ является сетью пространства $\exp X$ мощности $w(X)$.

Действительно если $(F) \in \exp X$ и $\langle V, \ V_1, ..., V_m \rangle$, где $X \backslash U$ компактно окрестность точки $(F)$ то $V \supset F$ и $F \cap V \neq \emptyset$, $i = 1, ..., m$. Благодаря регулярности $X$ найдется конечный набор $\{V_j\}$, чтобы $\bigcup_{j=1}^{n} \bar{V}_j$ покрывает $X \backslash U$ и непересекается с $F$. В каждое открытое множество $V_1, ..., V_m$ можно вложить по базисному подмножеству $V_i^*(V_i^*$ соответственно в $V_i)$, чтобы $V_i^* \cap F \neq \emptyset$. Доказательство завершено.

**Следствие 3.** *Для пространства $X$ со счетным весом $\exp X$ в топологии Шаботи имеет счетную сеть а следовательно сепарабельно и число Суслина $c(\exp X)$ счетно.*

ТЕОРЕМА 5. *Для регулярного локально компактного пространства $X$ веса $w(X)$ пространство $\exp X$ в топологии Шаботи имеет тот же вес $w(\exp X)$.*

*Доказательство.* Поскольку $X$ можно вложить в $\exp X$ то $w(X) \geqslant w(\exp X)$. В пространстве $X$ выберем базу $\beta$ веса $w(X)$, чтобы $\bar{V}$ компактно для каждого $V \in \beta$.

Тогда $\langle X \backslash (\bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i), \ V_1, ..., V_m \rangle$, где $U_i, V_j \in \beta$ база пространства $\exp X$ веса $\geqslant w(X)$. Пусть $(F) \in \exp X$ и $\langle U, V_1, ..., V_m \rangle$ ее окрестность, где $U \in \beta, V_j \in \beta$, тогда $\langle X \backslash (\bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i), \ V_1, ..., V_m \rangle$ окрестность $(F)$ такое, что $U_i \in \beta$ и $U_i$ пересекается с $F$ для каждого $i = 1, ..., n$. Тогда $\langle X \backslash (\bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i), \ V_1, ..., V_m \rangle \subset \langle U, \ V_1, ..., V_m \rangle$. Доказательство завершено.

## Литература


1. А.В. Архангельский, Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты, *УМН*, **35**, 29–84 (1978).
2. R. Engelking, *General Topology*, Warszava (1978).
3. E. Michael, Topologies on spaces of subsets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71**, 152–182 (1951).
4. J. Flachmayer, Vershiedene Topologizierungen im raum der abgechlossen Menger, *Math. nachr.*, Berlin, **26**, 321–327 (1964).
5. Г. Пранинскас, Свойства экспоненты в топологиях типа Шаботи, *Лит. матем. сборник*, Вильнюс, **28**(2), 334–332 (1988).



REZIUMĖ

***G. Praninskas. Apie kai kuriuos eksponentės su Šaboti topologijomis kardinalinius invariantus***

Nagrinėjamas sąryšis tarp bazinės topologinės erdvės ir hipererdvės su Šaboti topologija kardinalinių invariantų. Įrodyta, kad eksponentei su Vietorio topologija jos pseudosvoris neviršija bazinės erdvės svorio. Lokaliai kompaktiškom erdvėm jų svoris sutampa su eksponentės Šaboti topologijoje svoriu.