Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 486–490

Варианты функционального уравнения Коши

Юозас МАЧИС (MII)
e-mail: jmacys@ktl.mii.lt

Резюме. В статье рассматривается функциональное уравнение Коши и его варианты – функциональные уравнения логарифмической, степенной и показательной функций в максимально общей ситуации и при минимальных требованиях.

Ключевые слова: функциональное уравнение, уравнение Коши, метод Коши.

1. Метод Коши

Уравнение Коши и его аналоги разбираются во многих руководствах (см., например, [1]–[3]), рассматривающих функциональные уравнения. К сожалению, на решения вышеупомянутых уравнений зачастую накладываются очень жесткие условия, и обычно остается непонятным, почему в каждом конкретном случае нельзя ограничиться менее обременительными требованиями. Целью настоящей статьи является прояснение этого вопроса.

Функциональное уравнение

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

называется функциональным уравнением Коши. Функция, удовлетворяющая уравнению (1), называется аддитивной. Оказывается, что найти все аддитивные функции сложно. Зато довольно просто эта задача решается в множестве непрерывных (и даже монотонных или ограниченных в хотя бы одном интервале) функций.

Итак, положим в уранении (1) $y=x$, тогда $f(2x)=2f(x)$. Полагая в уравнении (1) $y=2x$, получаем $f(3x)=f(2x)+f(x)=2f(x)+f(x)=3f(x)$, и продолжая при помощи математической индукции имеем $f(nx)=nf(x)$. Подставляя в это уравнение $x=my/n$ $(m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N})$, получаем $f(my)=nf(my/n)$, $mf(y)=nf(my/n)$, т.е.

$$f\left(\frac{m}{n}y\right)=\frac{m}{n}f(y). \tag{2}$$

Подставив в уравнение (2) $y=0$ и $y=1$, имеем $f(0)=0$ и $f(m/n)=mf(1)/n$. Обозначив $f(1)=k$, получаем, что $f(m/n)=km/n$ для всех $m\geqslant 0$, $n>0$, т.е.

$$f(r)=kr \tag{3}$$

для всех неотрицательных рациональных чисел. Но подставляя в уравнение (1) $y = -x$ получаем $f(0) = f(x) + f(-x)$, т.е. $f(-x) = -f(x)$. Это означает, что каждая аддитивная функция нечетна, поэтому если s – отрицательное рациональное число, то (3) дает $f(s) = -f(-s) = -k(-s) = ks$, так что равенство (3) имеет место для всех рациональных чисел.

Итак, по ходу дела мы получили следующий результат:

В классе функций $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *уравнению* (1) *удовлетворяют только линейные функции* $f(x) = kx$ *(*$k = \mathrm{const}$*).*

Закончим решение задачи в классе непрерывных функций. Пусть x – произвольное действительное число. Возьмем последовательность рациональных чисел $\{x_n\}$ такую, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Поскольку искомая функция $f(x)$ непрерывна, то

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (kx_n) = k \lim_{n\to\infty} x_n = kx.$$

Проверка показывает, что $f(x) = kx$ удовлетворяет уравнению (1):

$$f(x+y) = k(x+y) = kx + ky = f(x) + f(y).$$

Итак, в классе непрерывных функций аддитивными являются лишь линейные функции.

Изложенный метод решения функциональных уравнений называется *методом Коши.*

Найдем все функции, удовлетворяющие уравнению (1) и ограниченные сверху хотя бы в одном замкнутом промежутке. Предположим, что аддитивная функция ограничена сверху, $f(x) \leqslant M$, в интервале $[a; a+T]$, где T – фиксированное положительное число. Докажем, что тогда функция $f(x)$ ограничена сверху и в интервале $[0; T]$. Действительно, пусть $x \in [0; T]$. Тогда $x + a \in [a; a+T]$, поэтому

$$f(x+a) = f(x) + f(a) \leqslant M,$$

так что $f(x) \leqslant M - f(a)$. Обозначив правую часть этого неравенства через M_1, имеем $f(x) \leqslant M_1$ для всех $x \in [0; T]$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(xT)$. Эта функция аддитивна и ограничена сверху в интервале $[0; 1]$: если $x \in [0; 1]$, то $xT \in [0; T]$, и $g(x) = f(xT) \leqslant M_1$. Обозначим $g(1) = k$. Мы уже знаем аддитивную функцию, которая в точке 1 принимает значение k – это функция kx. Теперь рассмотрим функцию $h(x) = g(x) - kx$. Функция $h(x)$ также аддитивна и ограничена сверху в интервале $[0; 1]$,

$$h(x) = g(x) - kx \leqslant g(x) + |k|x \leqslant M_1 + |k| = M_2,$$

но главное, что она периодична с периодом 1:

$$\begin{aligned} h(x+1) &= g(x+1) - h(x+1) = g(x) + g(1) - kx - k \\ &= g(x) + k - kx - k = g(x) - kx = h(x). \end{aligned}$$

Однако если функция периодична с периодом 1 и ограничена сверху числом M_2 в интервале $[0; 1]$, то она ограничена сверху числом M_2 на всей прямой $\mathbb{R}$.

А теперь докажем, что $h(x)$ тождественно равна 0. Поскольку она 1-периодична, то достаточно доказать, что $h(x) \equiv 0$ в интервале $[0; 1]$. Предположим противное – пусть $h(x_0) \neq 0$ в точке $x_0 \in [0; 1]$. Предположим сначала, что $h(x_0) > 0$. Тогда $h(nx_0) = nh(x_0)$ (вспомним метод Коши), и натуральное n можно взять настолько большим, что $nh(x_0) > M_2$. Но тогда $h(nx_0) > M_2$, а это противоречит ограниченности функции $h(x)$. Аналогично, если $h(x_0) < 0$, то $h(-nx_0) = -nh(x_0)$, и выбрав n достаточно большим, подучим неравенство $h(-nx_0) > M_2$.

Противоречие показывает, что $h(x) \equiv 0$. Это означает, что $g(x) = h(x) + kx = kx$, и, следовательно, $f(x) = g(x/T) = kx/T$, т.е. $f(x)$ – линейная функция.

Разумеется, мы получим тот же результат, если $f(x)$ ограничена снизу, т.е. $f(x) \geqslant -M$. Тогда функция $h(x) = -f(x)$ ограничена сверху, и снова $h(x)$ (тем самым и $f(x)$) является линейной.

Итак, аддитивная функция, определенная на всей прямой и не являющаяся линейной, необходимо будет неограниченной как снизу, так и сверху в каждом (сколь угодно малом) интервале.

Перейдем к вариантам уравнения Коши. Мы уже видели, что на решения уравнения Коши приходится налагать некоторые условия. Поэтому и далее на решения уравнений будем накладывать наименее ограничительное условие ограниченности в некотором замкнутом подынтервале интервала $(0; +\infty)$. Уравнения

$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{4}$$

$$f(xy) = f(x) + f(y), \tag{5}$$

$$f(x + y) = f(x)f(y), \tag{6}$$

можно решать по методу Коши независимо от уравнения (1), но намного проще их решать сведением к уравнению Коши.

2. Уравнение степенной функции

Рассмотрим уравнение

$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{4}$$

причем будем искать решения $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ограниченные в некотором интервале $[a; b]$, $b > a > 0$.

Положим в уравнении (4) $x = y = 0$. Тогда $f(0) = f^2(0)$, и либо $f(0) = 1$, либо $f(0) = 0$. Если $f(0) = 1$, то из уравнения (4) при $y = 0$ получаем $f(0) = f(x)f(0)$, т.е. $f(x) \equiv 1$. Эта функция, очевидно, является решением уравнения (4). Далее будем считать, что $f(0) = 0$.

Возьмем $x = y = 1 \Rightarrow f(1) = f^2(1) \Rightarrow f(1) = 0$ или $f(1) = 1$. Если $f(1) = 0$, то $y = 1 \Rightarrow f(x) = f(x) \cdot 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$. Эта функция дает второе решение уравнения (4). Далее будем считать, что $f(1) = 1$.

Теперь положим $x = y = -1 \Rightarrow f^2(-1) = 1 \Rightarrow$ а) $f(-1) = 1$ или б) $f(-1) = -1$. В случае а) $f(-1) = 1$, и $y = -1 \Rightarrow f(-x) = f(x)$, т.е. $f(x)$ четна. В случае б) $f(-1) = 1$, и $y = -1 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$, т.е. $f(x)$ нечетна.

Следовательно, в обоих случаях а) и б) достаточно рассматривать $x > 0$, $y > 0$. Полагаем $x = y = \sqrt{t}$ $(t > 0)$ $\Rightarrow f(\sqrt{t}) = f^2(\sqrt{t}) \geqslant 0$, т.е. $f(x)$ неотрицательна. Докажем, что $f(x) \neq 0$. Пусть, напротив, $f(x_0) = 0$ при $x_0 > 0$. Тогда $f(y) = f(y/x_0 \cdot x_0) = f(y/x_0) \cdot f(x_0) \equiv 0$, но функцию $f(x) \equiv 0$ мы уже учли. Следовательно, $f(x) > 0$ при $x > 0$, и равенство (4) можно прологарифмировать: $\ln f(xy) = \ln f(x) + \ln f(y)$. Полагая здесь $x = \mathrm{e}^u$, $y = \mathrm{e}^v$, получаем $\ln f(\mathrm{e}^{u+v}) = \ln f(\mathrm{e}^u) + \ln f(\mathrm{e}^v)$. Обозначив $\ln f(\mathrm{e}^x)$ через $g(x)$, имеем $g(u + v) = g(u) + g(v)$. Если $f(x)$ ограничена в интервале $[a; b]$, то $g(x)$ ограничена в интервале $[\ln f(\mathrm{e}^a); \ln f(\mathrm{e}^b)]$, а поэтому линейна, $g(x) = kx$. Значит, $\ln f(\mathrm{e}^x) = kx$, $f(\mathrm{e}^x) = (\mathrm{e}^x)^k$, и $f(x) = x^k$ $(x > 0)$. Теперь в случае $f(x)$ четной имеем $f(x) = |x|^k$, а в случае $f(x)$ нечетной $f(x) = x|x|^{k-1}$.

Итак, получаем 4 решения:

$$f(x) \equiv 1, \quad f(x) \equiv 0, \quad f(x) = \begin{cases} |x|^k, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x|x|^{k-1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

и легко проверить, что они действительно удовлетворяют уравнению (4).

Обратим внимание читателя на тот интересный факт, что третье решение при $k = 0$, т.е. решение $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ не совпадает с решением $f(x) \equiv 0$. Интересно также, что третье и четвертое решения при $k < 0$ разрывны в точке 0 (и неограничены в ее окрестности).

Впрочем, если искать решения уравнения (4) $f\colon (0; \infty) \to \mathbb{R}$, то рассмотрение сильно упрощается, и в качестве решения мы получаем лишь степенную функцию $f(x) = x^k$ (что вполне достаточно для элементарного анализа). Заметим, что хотя она и непрерывна, но тоже при $k < 0$ неограничена в правой полуокрестности нуля.

3. Уравнение логарифмической функции

Рассмотрим уравнение

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{5}$$

на $\mathbb{R}$. Положим в нем $y = 0$, тогда $f(0) = f(x) + f(0)$, т.е. $f(x) \equiv 0$. Итак, при условии (5) на $\mathbb{R}$ задача становится тривиальной, и поэтому естественно искать решения $f\colon (0; \infty) \to \mathbb{R}$, предполагая ограниченность f в некотором интервале $[a; b]$, $b > a > 0$.

Возьмем $x = e^u$, $y = e^v$, тогда $f(e^u e^v) = f(e^{u+v}) = f(e^u) + f(e^v)$. Обозначив $f(e^u) = g(u)$, имеем $g(u+v) = g(u) + g(v)$. Функция $g(u)$ ограничена в интервале $[\ln a; \ln b]$, поэтому $g(u) = ku$, $f(e^u) = ku$, $f(x) = k \ln x$.

4. Уравнение показательной функции

Рассмотрим уравнение

$$f(x+y) = f(x)f(y), \tag{6}$$

причем опять будем искать решения $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ограниченные в некотором интервале $[a; b]$, $b > a > 0$.

Полагаем в (6) $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = f^2(0) \Rightarrow f(0) = 0$ или $f(0) = 1$. Если $f(0) = 0$, то $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$, и получаем функцию $f(x) \equiv 0$, которая удовлетворяет уравнению. Имеем $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)f(x/2) = f^2(x/2) \geqslant 0$, и если хотя бы в одной точке x_0 будет $f(x_0) = 0$, то $f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$, и опять $f(x) \equiv 0$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $f(x) > 0$. Логарифмируем: $\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y)$. Обозначив $\ln f(x) = g(x)$, имеем $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Поскольку функция $g(x)$ ограничена в интервале $[\ln a; \ln b]$, то $g(x)$ линейна, т.е. $g(x) = kx$. Тогда $f(x) = e^{g(x)} = e^{kx} = a^x$ $(a > 0)$. Проверка показывает, что функция a^x удовлетворяет уравнению (6). Впрочем, уже полученную функцию $f(x) \equiv 1$ отдельно выписывать не надо – она получается из общего решения $f(x) = a^x$ при $a = 1$.

Литература

1. B.J. Venkatachala, *Functional Equations*, Prism, Bangalore (2002).
2. Г.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 1, ОГИЗ, Москва-Ленинград (1947), с. 187–189.
3. Л.М. Лихтарников, *Элементарное введение в функциональные уравнения*, Лань, Санкт-Петербург (1997).

SUMMARY

J. Mačys. Variants of the functional equation of Cauchy

In this paper solution of the Cauchy functional equation and variants of it are considered.

Keywords: functional equation, Cauchy's equation, Cauchy's method.