

Apie Kotzigo hipotezės įrodomumą

Livija MALIAUKIENĖ (VPU)

el. paštas: maliaukiene@vpu.lt

Jau 1936 m. psichologas Levinas [1] individo „gyvenimo erdvei“ vaizduoti naudojo plokštuminius „žemėlapius“, kurių sritys vaizdavo žmogaus veiklos rūšis (darbą, pomėgius ir pan.). Jei tarsime, kad kiekviena „žemėlapių“ sritis yra vienkart susijusi, o gretimų sričių sienos yra kreivės (o ne taškai), tai tokiam „žemėlapiui“ galime sukonstruoti jį atitinkantį grafą, kuriame kiekviena viršūnė atitiks vieną sritį, o dvi viršūnės šiame grafe bus jungtinės, jei atitinkančios jas sritys – gretimos.

Šis požiūris paskatino kitus psichologus pritaikyti grafų teoriją ir santykiams tarp žmonių vaizduoti. Nėra aišku, kas pirmasis suformulavo sekantį teiginį, nei kas pirmas jį pateikė žmogiškų santykių plotmėje:

1 teiginys. Tarkime, kad kažkokioje žmonių grupėje kiekviena draugų pora turi vieną bendrą draugą, tuomet šioje grupėje egzistuoja žmogus, kuris yra visų draugas.

Matematikų kalboje tai vadinama *teiginiu apie draugystę*. Šį teiginį taip pat galima suformuluoti grafų teorijos kalba, jei nagrinėjamos grupės žmones žymėsime taškais, o jų draugystę – briauna, jungiančia atitinkamas viršūnes bei tarsime, kad jei A draugauja su B , tai ir B draugauja su A .

Priminsime, kad grafu $G(V, X)$ vadinsime viršūnių aibę $V \neq \emptyset$ bei briaunų aibę X , kurios kiekvienas elementas $x = (u, v)$, čia $u, v \in V$. Sakysime, kad: a) x jungia viršūnes u ir v , b) u ir v yra jungtinės viršūnės, c) briauna x yra *incidentinė* tiek viršūnei u , tiek ir viršūnei v . *Maršrutu* grafe G vadinsime seką iš viršūnių ir jas jungiančių briaunų: $v_1 x_1 v_2 x_2 \dots x_{n-1} v_n$. Maršrutas *uždaras*, jei $v_1 = v_n$ ir *atviras* priešingu atveju. Maršrutas vadinamas *grandine*, jei visos jo briaunos yra skirtingos ir *paprasta grandine*, jei visos jo viršūnės (o iš to seka, kad ir briaunos) yra skirtingos. Uždara grandinė vadinama ciklu ir žymima C_n . Viršūnės v *laipsnis* $\deg v$ – tai briaunų, incidentinių viršūnei v , skaičius. Grafas G vadinamas *reguliariu laipsnio r grafu*, jei $\deg v_i = r, \forall v_i \in V$. *Atstumu* $d(u, v)$ grafe G vadinsime trumpiausią paprastą grandinę, jungiančią u ir v (t.y. šios grandinės briaunų skaičių) ir $d(u, v) = \infty$, jei toks maršrutas grafe neegzistuoja. Grafas G vadinamas *jungiu*, jei bet kurias dvi jo viršūnes jungia paprasta grandinė.

Dabar jau 1-ąjį teiginį galime suformuluoti taip:

1* teiginys. Tarkime, kad G yra grafas, kuriame bet kuri viršūnių pora yra jungtinė su (ta pačia) viršūne, tuomet grafe G yra viršūnė, jungtinė su visomis likusiomis G viršūnėmis.

Pastebėsime, kad nurodytąją savybę turi taip vadinamas „vėjo malūno“ grafas. Įrodoma, kad tokie grafai yra vieninteliai (iš esmės) grafai, tenkinantys 1^* teiginį. Šį teiginį galima suformuluoti ir taip:

1^{**} **teiginys.** Tegul G – grafas, kuriame bet kurias dvi viršūnes u ir v jungia vienintelis ilgio $d(u, v) \leq 2$ maršrutas, tuomet G yra „vėjo malūno“ grafas.

Dabar panagrinėkime grafa, kuriame bet kurias dvi viršūnes u ir v jungia vienintelis ilgio $d(u, v) > 2$ maršrutas. Remiantis Antono Kotzigo hipoteze, toks grafas paprasčiausiai neegzistuoja.

Kotzigo hipotezė. Tegul $l > 2$. Neegzistuoja grafas, kuriame bet kurios dvi jo viršūnės būtų sujungtos vienintele ilgio l grandine.

Pats Kotzigas 1983 m. patikrino, kad hipotezė teisinga su visais $2 < l \leq 8$. Kinai Xing ir Hu nustatė jos teisingumą visiems $l \geq 12$, o likusių atvejų $9 \leq l \leq 11$ teisingumą neseniai (2000) patikrino Yang, Lin, Wang ir Li.

Tokiu būdu, Kotzigo hipotezė dabar jau teorema.

Literatūra

1. K. Lewin, *Principles of psychology*, N.Y. (1939).
2. A. Kotzig, Regularly k -path connected graphs, *Congressus Numerantium*, **40**, 137–141 (1983).
3. K. Xing, B. Hu, On Kotzig conjecture for graphs with a regular pathconnectedness, *Discrete Mathem.*, **135**, 387–393 (1994).
4. Y. Yang, J. Lin, C. Wang, V. Li, On Kotzig conjecture concerning graphs with a unique regular path-connectivity, *Discrete Math.*, **211**, 287–298 (2000).
5. F. Harary, *Graph theory* (1969).

SUMMARY

L. Maliaukienė. About the provability of the Kotzig's hypothesis

In the paper Kotzig's hypothesis are investigated and turning its into theorem from the point of views of history are presented.

Keywords: graph theory, Kotzig's hypothesis.