

Daugiafazio tekėjimo uždavinių sprendimo įrankis ir jo taikymas daugiamačiams uždaviniams*

Aleksandr JAKUŠEV, Vadimas STARIKOVIČIUS (VGTU)

el. paštas: alexj@fm.vtu.lt, vs@sc.vtu.lt

Reziumė. Pirmiausiai, šiame darbe daroma trumpa daugiafazio skysčių tekėjimo uždavinių apžvalga, supažindinanti su sprendžiamų uždavinių klase. Toliau aprašomas sukurtas sprendiklis, kuris gali būti taikomas šios klasės uždavinių sprendimui. Galiausiai, parodomas šio sprendiklio darbas, sprendžiant įvairius daugiafazio skysčių judėjimo uždavinius. Parodoma, kaip sprendiklis sprendžia klasikinius uždavinius, kurių sprendimai žinomi, bei kai kuriuos daugiamačius uždavinius.

1. Daugiafazio tekėjimo matematiniai modeliai

Paskutiniuoju metu daugiafaziam tekėjimui ir šilumos pernešimui poringose terpėse yra skiriama labai daug dėmesio. Taip yra todėl, kad yra daugybė uždavinių, kur yra sutinkami šitie reiškiniai. Galima nurodyti tokius pavyzdžius, kaip poringų medžiagų (pvz., medienos) džiovinimas arba prisotinimas, žemės užteršimas ir jo valymas, naftos gavyba, radioaktyvių atliekų saugojimas, popieriaus gamyba, biologija (įvairių audinių veikla), filtrų konstravimas ir t.t.

Poringa terpė susideda iš kietosios fazės (pvz., mediena arba smėlis, akmenukai žemėje) ir ertmių. Laikoma, kad ertmės yra tarpusavyje sujungtos, kitaip neįmanomas jokių skysčių tekėjimas. Ertmės yra užpildytos viena arba keliomis fazėmis, kurios gali būti tiek skysčiai (pvz., vanduo, nafta), tiek ir dujos (pvz., oras, garai). Ertmių matmenys d taip pat turi tenkinti papildomas sąlygas: $l \ll d \ll L$. Iš vienos pusės, jie turi būti žymiai didesni už fazių molekulių laisvojo kelio ilgį l , kad skysčiams būtų galima taikyti kontinuumo sąvoką. Iš kitos pusės, ertmių matmenys turi būti žymiai mažesni už nagrinėjamos sistemos geometrinius išmatavimus L , kad būtų galima taikyti makroskopinius modelius.

Daugiafazio tekėjimo poringose terpėse matematinis modelis aprašomas diferencialinių lygčių sistema, kurios pavidalas priklauso nuo pasirinktų nepriklausomų kintamųjų [1]. Kai tekančios fazės neskaidomos į komponentes, o taip pat neatsižvelgiama į termodinaminius procesus, ši lygčių sistema atrodo taip:

- Masės tvermės dėsnis kiekvienai fazei:

$$\frac{\partial (\Phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha\} = \rho_\alpha q_\alpha; \quad (1)$$

*Šis straipsnis paruoštas pagal EUREKA projektą E!2623 OPTPAPER, remiant VMSF (sutartis V-13/V-03034).

- Darcy dėsnis kiekvienai fazei:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \mathbf{K} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}); \quad (2)$$

- Kapiliarinis slėgis visoms įmanomoms fazių poroms:

$$p_{c\beta\alpha}(\mathbf{x}, t) = p_\beta(\mathbf{x}, t) - p_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad \beta \neq \alpha; \quad (3)$$

- Prisotinimo lygtis:

$$\sum_{\alpha} S_{\alpha} = 1. \quad (4)$$

Iš šitų lygčių yra ieškomi kiekvienos fazės prisotinimo S_{α} , slėgio p_{α} bei greičio \mathbf{u}_{α} pasiskirstymai erdvėje tam tikrame laiko intervale.

2. Skaitinio modelio ypatumai ir sprendiklio struktūra

Sudarant skaitinį modelį, (1)–(4) lygčių sistema buvo pertvarkyta į globalaus slėgio modelį, kai įvedami nauji, globalūs nepriklausomi kintamieji [1]. Pagrindinė šio modelio idėja yra globalaus slėgio įvedimas. O pats daugiafazis tekėjimas yra aprašomas performuluotais per mišinio savybes ir charakteristikas (tankį, klampumą, slėgį, greitį) tvermės dėsniais. Šis modelis pasižymi tuo, kad jo lygtys yra mažiau susijusios, be to, į jas įeinantys dydžiai yra glodesni.

Sprendiklis ateityje gali būti plečiamas įjungiant naujas uždavinių klases, tačiau pirmam etapui buvo pasirinktas dvifazis izoterminis tekėjimas poringoje terpėje, kai fazės tarpusavyje nesimaišo. Šis uždavinys yra aprašomas dviejų diferencialinių lygčių sistema. Pirmoji lygtis paprastai yra vadinama slėgio lygtimi:

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \left(\frac{\mathbf{K}}{\nu} [\nabla p - (\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2) \mathbf{g}] \right) = 0. \quad (5)$$

Iš šitos lygties yra randamas mišinio slėgis p . Antroji lygtis yra prisotinimo (*saturation*) lygtis:

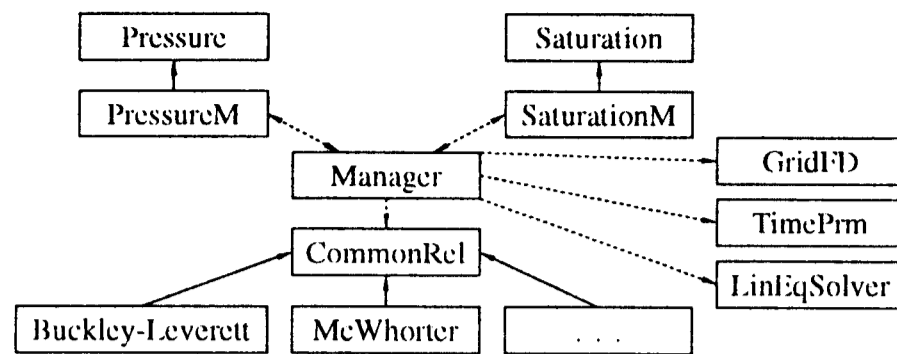
$$\varepsilon \frac{\partial (\rho_1 s_1)}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{u} \lambda_1) = -\nabla \left(\frac{\mathbf{K} \lambda_1 \lambda_2}{\nu} [\nabla p_c + (\rho_1 - \rho_2) \mathbf{g}] \right) + m_1, \quad (6)$$

kurioje mišinio greitis yra randamas iš Darcy dėsnio:

$$\rho \mathbf{u} = -\frac{\mathbf{K}}{\nu} [\nabla p - (\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2) \mathbf{g}]. \quad (7)$$

Iš prisotinimo lygties (6) yra randamas pirmos fazės prisotinimas s_1 .

Šių diferencialinių lygčių netiesiškumo ir tarpusavio sąryšio analizė rodo, kad sistemos skaitiniam sprendimui gali būti pritaikyta nuosekli sprendimo procedūra. Šioje procedūroje sistemos lygtys yra iš pradžių atskiriamos, linearizuojamos ir pagaliau skaitiškai sprendžiamos neišreikštiniu būdu. Ši procedūra yra dar kartais vadinama pusiau neišreikštine. Skirtingai nuo pilnai neišreikštinių schemų ji gali būti natūraliai



1 pav. Sprendiklio klasių diagrama.

išplėsta, pridėjus į modelį papildomą lygtį prisotinimui (trečios fazės), koncentracijai arba temperatūrai. O palyginus su IMPES procedūromis ji yra efektyvesnė, nes susilpnėja reikalavimai laiko diskretizacijos žingsniui.

Atskirtos diferencialinės lygtys yra skaitiškai aproksimuojamos baigtinių tūrių schemomis. Linearizacijai gali būti naudojamos Pikardo arba Niutono iteracijos. Įrankyje yra realizuotas diskretusis tinklas, kuris padalina sprendžiamo uždavinio sritį į baigtinius tūrius. Aproksimuojant srautus per baigtinio tūrio paviršius gali būti naudojami koeficientų aritmetiniai, harmoniniai vidurkiai arba reikšmės pasroviui (*upwind*). Yra gaunamos lygčių sistemos su 3-jų išstrižainių matricos vienmačiu atveju, 5-ių išstrižainių matricos dvimačiu atveju ir 7-ių išstrižainių matricos trimačiu atveju. Įrankyje yra realizuotos Dirichle, Neumanno ir pilno srauto kraštinės sąlygos.

Kuriant sprendiklį, buvo pasirinkta C++ programavimo kalba ir pasinaudota objektiškai orientuotomis programavimo technologijomis. Tai sumažina programavimo ir testavimo laiką, padidina programos lankstumą, programos kodas pasidaro aiškesnis, jį lengviau galima panaudoti kitur. Kuriant sprendiklio architektūrą, buvo atsižvelgta į paketą *DiffPack*. Šis komercinis paketas – tai klasių rinkinys įvairiausių diferencialinių lygčių sistemų sprendimui [3].

Sprendiklis yra pavaizduotas 1 pav. Buvo sukurtos tokios pagrindinių tipų klasės:

Slėgio lygties sprendikliai. Tai yra klasė *Pressure* ir jos palikuonys, realizuojantys įvairius šios lygties sprendimo metodus.

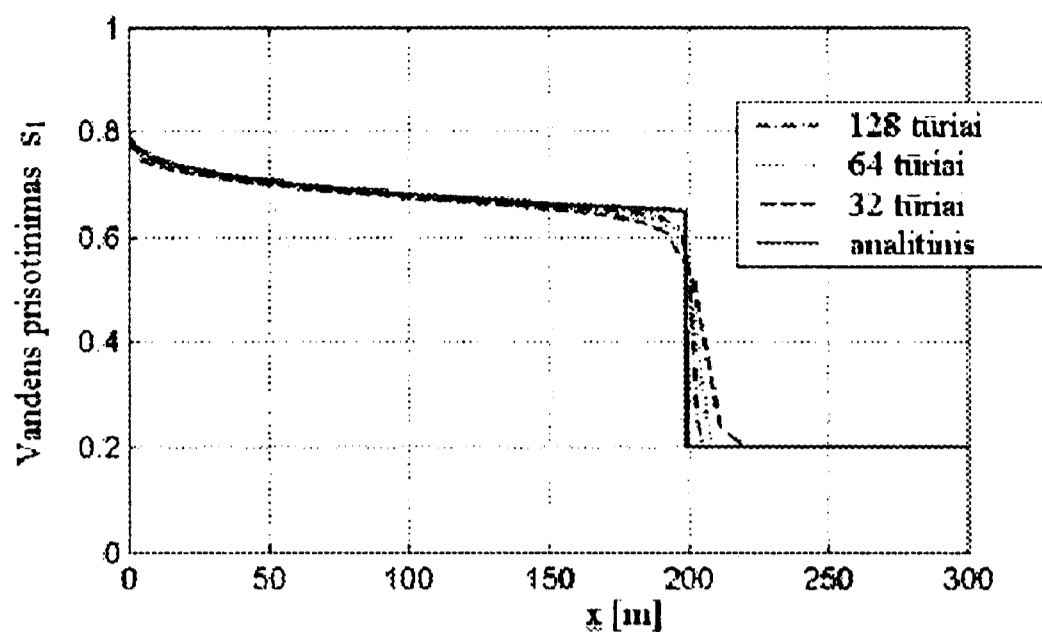
Prisotinimo lygties sprendikliai. Tai yra klasė *Saturation* ir juos palikuonys, realizuojantys įvairius šios lygties sprendimo metodus.

Sistemos savybių klasė. Tai yra klasė *CommonRel* ir jos palikuonys, aprašantys sistemos savybes ir kitas uždavinio sąlygas.

Valdančioji klasė *Manager*. Ji sujungia visas kitas klases į bendrą schemą, o taip pat atlieka tokius bendrus veiksmus, kaip tiesinių lygčių sistemos sprendimą.

3. Sprendiklio skaitiniai testai

Sprendiklis buvo testuojamas sprendžiant Buckley–Leverett (1-D ir 2-D atvejais) ir McWhorter uždavinius. Vienmatis Buckley–Leverett ir McWhorter uždaviniai pasižymi tuo, kad jiems egzistuoja analitiniai arba kvazianalitiniai sprendiniai, todėl jie gerai tinka programos kodo patikrinimui. Patikrintas sprendiklis buvo panaudotas dvimačio Buckley–Leverett uždavinio sprendimui surasti.



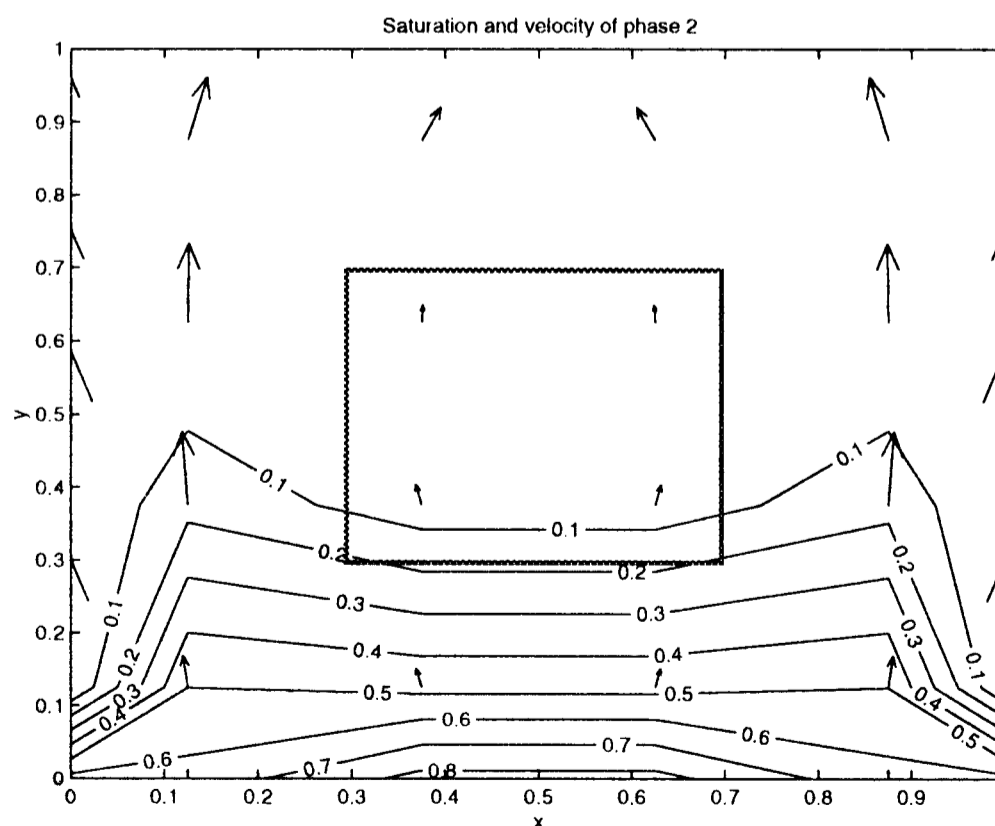
2 pav. Buckley–Leverett uždavinio analitinis ir skaitiniai sprendiniai.

3.1. Buckley–Leverett vienmatis atvejis

Šis uždavinys gaunamas iš bendro modelio, paimant vienmatį atvejį ir padarant prielaidą, kad nėra kapiliarinių jėgų ir gravitacijos. Tada uždavinys susiveda į lygties $\varepsilon \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial \lambda(s)}{\partial x} = 0$ sprendimą. Ši lygtis yra gerai išnagrinėta [2]. Žinoma, kad ji gali turėti daug silpnų sprendinių, iš kurių tik vienas yra fizikinis. Norint nustatyti fizikinį sprendinį, naudojamos papildomos, pavyzdžiui, entropijos sąlygos. Kadangi mus domina tik fizikinis sprendinys, sprendiklis irgi turi surasti būtent fizikinį sprendinį.

Mūsų atveju tiriamas nestacionarus naftos išstūmimas vandeniu. Uždavinys yra sprendžiamas srityje $\Omega = (0, 300[m])$ ir laiko intervale $(0, 1500[d])$ su parametrais iš [2]. Buvo pasirinktas pakankamai mažas laiko žingsnis, o diskretaus tinklo žingsnis mažinamas. Rezultatai pavaizduoti 2 pav.

Kaip matome, skaitinis sprendinys konverguoja į analitinį. Jis elgiasi monotoniškai ir neturi nefizinių virpesių, ko mes ir siekėme pasirinkdami skaitinėje schemoje konvekcinių narių aproksimacijas pasroviui. Nesunku pastebėti, kad skaitinis sprendinys



3 pav. Buckley–Leverett 2-D uždavinio skaitiniai sprendiniai.

teisingai aproksimuoja bendrą vandens masę ir fronto judėjimo greitį. Deja pasirinktas skaitinis metodas pasireiškia ir skaitine difuzija, kuri suglodina vandens prisotinimo frontą. Be to šis metodas yra tik pirmosios tikslumo eilės.

3.2. *Dvimatis Buckley–Leverett atvejis*

Uždavinyje nagrinėjama heterogeninė terpė: viduje kvadrato $[0, 3; 0, 7] \times [0, 3; 0, 7]$ absoliutus pralaidumas yra 10 kartų mažesnis, nei už jo ribų. Vanduo patenka iš apačios. 3 pav. parodyti skaičiavimo rezultatai: prisotinimo izolinijos ir naftos greitis.

Literatūra

1. R. Čiegis, V. Starikovičius, Mathematical modeling of wood drying process, *Mathematical Modelling and Analysis*, 7(2), 177–190 (2002).
2. R. Helmig, *Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface – a Contribution to the Modelling of Hydrosystems*, Springer-Verlag (1997).
3. Hans Petter Langtangen, *Computational Partial Differential Equations, Numerical Methods and Diff-pack Programming*, Springer-Verlag (1999).

SUMMARY

A. Jakušev, V. Starikovičius. Multiphase fluid flow solver and its application to multidimensional problems

Modelling of fluid flow in porous media plays an important part in many applications. The authors have created extensible software package (the solver) for this task, using object-oriented approach. After a short introduction to the problems aimed by this solver, the solver is described, followed by the results of benchmarking and numerical solution of Buckley–Leverett 2-D problem.

Keywords: porous media, multiphase flow, numerical modelling, OOP, Buckley–Leverett.