Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 787–791

Apie variacinės eilutės kraštinių narių geometrinį stabilumą

Algimantas AKSOMAITIS (KTU)
el. paštas: aksoma@fmf.ktu.lt

1. Įvadas

Tarkime, kad $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ yra paprastoji atsitiktinė imtis iš generalinės aibės su logistine skirstinio funkcija

$$F(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Atsitiktinis dydis $N = N(p)$ yra nepriklausomas nuo visų X_j, $j \geqslant 1$ ir geometriškai pasiskirstęs:

$$P(N = j) = p(1-p)^{j-1}, \quad j \geqslant 1.$$

Sudarykime variacinę eilutę:

$$X_1^{(N)} \leqslant X_2^{(N)} \leqslant \ldots \leqslant X_N^{(N)}.$$

Mus domina tiesiškai normuotų struktūrų $X_k^{(N)}$, $k \geqslant 1$ – fiksuotas, o taip pat $X_1^{(N)}$ ir $X_N^{(N)}$ bendrojo skirstinio geometrinis stabilumas. Geometriškai maks-stabiliesiams skirstiniams yra pašvęsta nemažai literatūros. Panašiai problematikai yra skiriamos [1]–[4] publikacijos.

APIBRĖŽIMAS [3]. Dydį X_j vadiname geometriškai maks-stabiliuoju, jeigu egzistuoja tokios normalizavimo konstantos $a(p)$ ir $b(p)$, su kuriomis

$$P\Big(\max\big(X_j(p),\ j = \overline{1, N}\big) < x\Big) = F(x); \tag{1}$$

čia $X_j(p) = \frac{X_j - a(p)}{b(p)}$.

Jeigu (1) pakeisime asimptotiniu sąryšiu, kai $p \to 0$, tai sakysime, kad X_j yra asimptotiškai geometriškai maks-stabilusis dydis. Dažnai ne dydį X_j, bet visą struktūrą vadina geometriškai stabiliąja (geometrinių maksimumų stabilumas). Analogiškai apibrėžiami geometriškai ministabilieji atsitiktiniai dydžiai [3].

Nesunku įsitikinti, jog (1) yra ekvivalentus sąryšiui

$$g_N\big(F(xb(p) + a(p)\big) = F(x);$$

čia tikimybes generuojančioji funkcija $g_N(z) = Mz^N$.

Yra įrodyta [1], jog logistinis dydis X_j yra geometriškai maks-stabilus:

$$P\big(X_N^{(N)} + \ln p < x\big) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Šiame straipsnyje atsakysime į klausimus:
1. Ar logistinis dydis yra mini-stabilus?
2. Ar logistinis dydis yra geometriškai stabilus statistikos $X_k^{(N)}$ požiūriu ($k > 1$)?
3. Ar dydžiai $X_1^{(N)}$ ir $X_N^{(N)}$ yra asimptotiškai nepriklausomi?

Atsakymus gausime panaudodami tiesioginį tikimybinį metodą.

2. Rezultatų formuluotė ir pagrindimas

TEOREMA. *Tarkime, kad dydžiai X_j, $j \geqslant 1$ yra logistiniai, o N – geometrinis su parametru p. Tada*
1. $P(X_1^{(N)} - \ln p < x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$
2. $P(X_k^{(N)} - \ln p < x) \underset{p\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^k}, \quad k > 1, \ x \in \mathbb{R}.$
3. $P\Big(X_1^{(N)} - \ln p < x, X_N^{(N)} < y + \ln p\Big) \underset{p\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-x-y}}{1+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x-y}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

Proof.

1. Pasinaudoję pilnosios tikimybės formule, gauname:

$$P\big(X_1^{(N)} - \ln p < x\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(1 - \big(1 - F(x + \ln p)\big)^j\Big)^j P(N = j)$$

$$= 1 - \frac{p(1 - F(x + \ln p))}{1 - (1 - F(x + \ln p))(1 - p)} = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-x} p}{p + \mathrm{e}^{-x}} \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}(1-p)}{p+\mathrm{e}^{-x}}}$$

$$= 1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

2. Esant atsitiktiniam imties tūriui, k-tąjį apatinį ekstremumą apibrėžiame tokiu būdu:

$$X_k^{(N)} = \begin{cases} X_k^{(j)}, & N = j, \ \ j = k, k+1, \ldots, \\ X_j^{(j)}, & N = j, \ \ j = 1, 2, \ldots, k-1. \end{cases}$$

Tada

$$P\big(X_k^{(N)} < x\big) = \sum_{j=1}^{\infty} P\big(X_{\min(j,k)}^{(j)} < x\big) P(N = j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} P\big(X_j^{(j)} < x\big) P(N = j) + \sum_{j=k}^{\infty} P\big(X_k^{(j)} < x\big) P(N = j)$$

$$= S_1^{(k)}(x) + S_2^{(k)}(x). \tag{2}$$

Kai $k = 1$, $S_1^{(k)}(x) = 0$ ir gauname atvejį, nagrinėtą 1-joje teoremos dalyje. Tarkime, kad $k > 1$. Tada

$$S_1^{(k)}(x) = p\sum_{j=1}^{k-1} F^j(x)(1-p)^{j-1} = \frac{pF(x)(1-(F(x)(1-p))^{k-1}}{1-F(x)(1-p)}. \tag{3}$$

Kadangi

$$F(x+\ln p) = \frac{p}{p+\mathrm{e}^{-x}} \to 0,$$

kai $p \to 0$, tai

$$\lim_{p\to 0} S_1^{(k)}(x+\ln p) = 0.$$

Žinoma [3], kad k-osios pozicinės statistikos skirstinio funkcija

$$P\big(X_k^{(j)} < x\big) = \frac{j!}{(k-1)!(j-k)!}\int_0^{F(x)} v^{k-1}(1-v)^{j-k}\,\mathrm{d}v,$$

arba, integruojant diferencialinį binomą, gauname:

$$P\big(X_k^{(j)} < x\big) = 1 - \sum_{t=0}^{k-1} C_j^t F^t(x)\big(1-F(x)\big)^{j-t}. \tag{4}$$

Dabar

$$S_2^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{\infty} P(N=j) - \sum_{t=0}^{k-1} F^t(x)\sum_{j=k}^{\infty} C_j^t\big(1-F(x)\big)^{j-t}P(N=j)$$

$$=(1-p)^{k-1} - p\sum_{t=0}^{k-1}\frac{(F(x)(1-p))^t}{t!}\sum_{j=k}^{\infty}(j-1)\ldots(j-t+1)\big(1-F(x)(1-p)\big)^{j-t}.$$

Kadangi

$$\sum_{j=k}^{\infty} j(j-1)\ldots(j-t+1)y^{j-t} = \Big(\sum_{j=k}^{\infty} y^j\Big)^{(t)} = \Big(\frac{y^k}{1-y}\Big)^{(t)},$$

tai pažymėdami

$$\big(1-F(x)\big)(1-p) = y,$$

gauname:

$$S_2^{(k)}(x) = (1-p)^{k-1} - \frac{p}{1-p}\sum_{t=0}^{k-1}\frac{(F(x)(1-p))^t}{t!}\Big(\frac{y^k}{1-y}\Big)^{(t)}. \tag{5}$$

Iš (2), (3) ir (5) išplaukia, kad

$$P\big(X_k^{(N)} < x\big) = \frac{pF(x)(1-F(x)(1-p))^{k-1}}{1-F(x)(1-p)} + (1-p)^{k-1}$$
$$- \frac{p}{1-p}\sum_{t=0}^{k-1}\frac{(F(x)(1-p))^t}{t!}\Big(\frac{y^k}{1-y}\Big)^{(t)},$$

kai $k > 1$ ir $y = (1-F(x))(1-p)$.

Dėl straipsnio apimties ribotumo imkime tik atvejį, kai $k = 2$.

Dabar

$$P\big(X_2^{(N)} < x + \ln p\big) = \frac{p(p\mathrm{e}^{-2x} + 2p\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 1) + \mathrm{e}^{-x}}{(p+\mathrm{e}^{-x})(1+\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

Skaičiuodami ribą, kai $p \to 0$, gauname:

$$\lim_{n\to\infty} P\big(X_2^{(N)} < x + \ln p\big) = \Big(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\Big)^2.$$

3. Tarkime, kad

$$P\big(X_2^{(N)} - \ln p < x\big) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$P\big(X_N^{(N)} - \ln p < y\big) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Skaičiuojame normuotų maksimumų ir minimumų bendrąją skirstinio funkciją:

$$P\big(X_1^{(N)} - \ln p < x, X_N^{(N)} + \ln p < y\big)$$
$$= \begin{cases} p\sum_{j=1}^{\infty} F^j(y-\ln p)(1-p)^{j-1}, & y - \ln p < x + \ln p,\\ p\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\big(F^j(y-\ln p) - (F(y-\ln p) - F(x+\ln p))\big)^j (1-p)^{j-1}, & \\ \qquad y - \ln p \geqslant x + \ln p; & \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}}, & y - x < 2\ln p,\\ \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}} - \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-y}p^2}{1+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x-y}-\mathrm{e}^{-y}p^2}, & y - x \geqslant 2\ln p. \end{cases}$$

Skaičiuodami ribą, kai $p \to 0$, gauname:

$$\lim_{p\to 0} P\big(X_1^{(N)} - \ln p < x,\ X_N^{(N)} + \ln p < y\big) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x-y}},$$

arba

$$\lim_{p\to 0} P\big(X_1^{(N)} - \ln p < x,\ X_N^{(N)} + \ln p < y\big) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-x-y}}{1+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x-y}}.$$

Teorema įrodyta.

3. Komentarai

1. Kai imties tūris N yra atsitiktinis, stochastinis minimumas ($k = 1$) yra geometriškai stabilus.
2. Kai imties tūris N yra atsitiktinis, apatiniai ekstremumai ($k > 1$) nėra geometriškai stabilūs, tačiau jie yra asimptotiškai stabilūs su ribine skirstinio funkcija – apibendrinta logistine funkcija. Perkėlimo teoremoje kategoriškai reikalaujama, kad $p = \frac{1}{n}$. Mūsų teiginys išpildytas bendresniu atveju: $p \to 0$.
3. Kai imties tūris yra geometrinis, logistinių dydžių maksimumai ir minimumai yra asimptotiškai priklausomi. Todėl nėra jų geometrinio stabilumo. Pastebėsime, kad neatsitiktinio imties tūrio atveju stochastiniai ekstremumais yra asimptotiškai nepriklausomi.
4. Teoremoje pateiktuose teiginiuose (2 ir 3 teoremos dalys) galima išryškinti konvergavimo į ribinį skirstinį greitį. Pavyzdžiui, antroje teoremos dalyje aproksimavimo ribiniu paklaida yra eilės p. Tikrai, nes

$$\Delta_N(p) = \frac{p(pe^{-2x} + 2pe^{-x} - e^{-x} + 1)}{(p + e^{-x})(1 + e^{-x})^2} - \frac{1}{(1 + e^{-x})^2}$$
$$= \frac{pe^{-x}(pe^{-x} + 2p - 1)}{(p + e^{-x})(1 + e^{-x})^2} = O(p), \quad p \to 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Literatūra

1. A. Aksomaitis, Perkėlimo teorema ir geometriškai maks-stabilieji atsitiktiniai dydžiai, *Liet. matem. rink.*, **43** (spec. nr.) (2003).
2. R.N. Pillai, Harmonic mixtures and geometric infinite divisibility, *J. Ind. Statist. Assoc.*, **28**, 87–98 (1990).
3. S. Rachev, S. Mittnik, *Stable Paretian Models in Finance*, John Willey, New York, Singapore, Toronto (2000).
4. M. Sreehari, Maximum stability and a gmeralization, *Statist. Probab. Lett.*, **23**, 339–342 (1995).

SUMMARY

A. Aksomaitis. About the geometrical stability of the marginal terms in variation series

It was proved that the logistic minimum is geometrically min-stable, positional statistics $X_k^{(N)}$, $k > 1$ are not geometrically stable, common minimum and maximum distributions are not asimptotically independent as the sample size is geometrical.

Keywords: extreme value, rate of convergence, max-geometric stability.