Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 406–409

Pastabos apie matematikos mokymo vidurinėje mokykloje pertvarką

Jonas TEIŠERSKIS (VPU)
el. paštas: dalia.kumponiene@vpu.lt

Vidurinės mokyklos matematikos mokymo turinį ir dėstymo eiliškumą faktiškai reglamentuoja trys dokumentai: vidurinės mokyklos matematikos programos, matematikos išsilavinimo standartai ir egzaminų programos. Argi ne paprasčiau – ir mokytojams daug aiškiau būtų, jei šie dokumentai, ypač pirmieji du (programos ir standartai) būtų vienoje vieningoje programoje. Be to, ir programos, ir ypač standartai yra labai nekonkretūs. Kad programos nekonkrečios – tai turi ir teigiamą pusę: neįrėmina vadovėlių autorių. Tačiau po to, kai jau vadovėliai parašyti, reikėtų, kad ekspertų komisija galutinai patikslintų programas ir jas sukonkretintų. O matematikos išsilavinimo standartai turi būti daug dalykiškesni, žymiai platesnės apimties ir pateikiami lygiagrečiai su matematikos programa kiekvienai temai. Suprantama, kad išsilavinimo standartai – ne uždavinynas ir juose neįmanoma ir nereikalinga iki smulkmenų nurodyti, kokius uždavinius mokiniai turi gebėti spręsti. Tačiau uždavinių sudėtingumas turi būti reglamentuojamas pakankamai aiškiai ir suprantamai.

Reikia pripažinti, kad po „šiurpinančių" programos projektų (diferencialinės lygtys, matricos, kompleksiniai skaičiai, trys mokymo lygiai ir t.t.) 2003/2004 m.m. vidurinės mokyklos matematikos programa visumoje yra priimtina. Tačiau matematikos mokymo vidurinėje mokykloje turinys ir griežtumas labai netolygiai ir neracionaliai paskirstyti atskirose mokyklos klasėse. Štai pustuštė VI klasės matematikos programa. Ten yra tik paprastosios trupmenos ir neigiamų skaičių įvadas. Teigiamųjų ir neigiamųjų skaičių veiksmai be reikalo perkelti į VII klasę. Be to, VII–X klasių matematikos programa ir apimties, ir griežtumo atžvilgiu yra labai supaprastinta, per daug palengvinta. Gi XI–XII (ypač XII) klasių programos perkrautos, ir didele apimtimi, ir įrodymo bei uždavinių sunkumu. Per didelis šuolis iš X į XI klasę. Be to, diferencijuotas mokymas tik nuo XI klasės yra pavėluotas. Tai reikėtų pradėti bent jau nuo IX klasės.

Siekiant palengvinti XI–XII klasių programą, reikėtų atsisakyti bent jau sąlyginės tikimybės. Tiesa, tuomet reikėtų kiek kitaip dėstyti nepriklausomus įvykius. Pvz., A. Plikuso XI–XII klasių mokomoje knygoje, „Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos pradmenys" (K. „Šviesa" 1993) įvykių nepriklausomumas dėstomas prieš sąlyginę tikimybę. Nepriklausomi įvykiai prieš sąlyginę tikimybę dėstomi ir N.J. Vilenkino, O.S. Ivaševo-Musatovo ir S.I. Švarcburdo Algebros ir matematinės analizės vadovėlyje XI klasei (Maskva „Prosvesčenija" 1996) rusų kalba. Atsisakyti „nepriklausomų įvykių" netikslinga, nes labai reikalinga formulė (apibrėžimas) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Be to, iš XI klasės į X galima būtų perkelti vieną kurią temą, kad ir plokštumos vektorius.

Naujoje matematikos programoje iki minimumo supaprastinti algebrinių ir trigonometrinių reiškinių tapatūs pertvarkiai, taip pat algebrinės, trigonometrinės ir logaritminės lygtys. Įdomu, kaip pagal naujas programos ir naujus vadovėlius mokęsi matematikos studentai sugebės mokytis matematinės analizės bei aukštosios matematikos.

Nesuprantama, kam reikalinga V–VI klasėse mokyti spręsti lygtis remiantis aritmetikos veiksmų duomenų ir gavinių priklausomybėmis. Juk tai neturi jokios pažintinės vertės ir prasmės. Ypač keista, kai V klasėje uždavinukas, kurį galima išspręsti vienu atimties veiksmu, sprendžiamas sudarant lygtį, ir tam skiriamas visas puslapis. Manome, kad V–VI klasėse (iki algebrinės sumos įvedimo) žodinius (teksto) uždavinius reikėtų spręsti aritmetiškai, t.y. klausimų ar paaiškinimų pagalba, bet be jokių lygčių. Suprantama, nereikia grįžti prie ilgų ir sudėtingų uždavinių, kurie sudarant lygtį sprendžiami paprasčiau nei be jos.

Kalbant apie lygčių sprendimo mokymo pradžią, iškyla problema, ar aiškinti, kad dėmenį galima perkelti iš vienos lygties pusės į kitą pakeitus ženklą. Toks dėmenų kilnojimas aišku nėra veiksmais. Gal pradžioje reikėtų lygtis mokyti spręsti pridedant prie abiejų lygties pusių tą patį skaičių ar reiškinį. Tačiau po kiek laiko tikslinga iš daugelio pavyzdžių nustatyti, kad dėmenį galima perkelti iš vienos lygties pusės į kitą su priešingu ženklu. Juk tai sutrumpina lygties sprendimą ir pasitaiko labai dažnai.

Racionaliąsias trupmenines lygtis reikėtų mokyti spręsti tik remiantis trupmenos lygumo nuliui būtina ir pakankama sąlyga. T.y. $\frac{S(x)}{V(x)} = 0$ tada ir tik tada, kai $S(x) = 0$, o $V(x) \neq 0$.

Kai trupmeninės lygtys sprendžiamos abi lygties puses dauginant iš „paprasčiausio“ bendro vardiklio, tai mokiniai panašiai sprendžia ir nelygybes. Pvz., spręsdami nelygybę $1 > \frac{1}{x}$, gauna $x > 1$! Ir dar, daliai mokinių atrodo, kad vardikliai dingsta subendravardiklinus, nes praktiškai sprendžiant aptariamas lygtis aiškinama, kad reikia lygties narius (dėmenis) subendravardiklinti ir mintyje abi lygties puses padauginti iš bendro vardiklio. Todėl kai kurie mokiniai skaičiuoja šitaip: $1 - \frac{1}{3} = 3 - 1 = 2$. Paklausus, kur dingo vardiklis, atsako, kad „subendravardiklinom!“.

Be to, daugeliui mokinių neaišku, kodėl abi lygties puses galima dauginti iš to paties reiškinio. Vadovėlyje tik nurodoma patikrinti, ar bendras vardiklis, įrašius į jį gautą sprendinį, nelygus nuliui.

Ne tik čia, bet ir aiškinant kai kurias kitas temas nusižengiama labai svarbiam matematikos didaktikos principui. Mokant matematikos, „kodėl“ yra svarbiau už „kaip“! Pvz., V kl. kaip iš dangaus nukrenta formulė $S = vt$.

Mokiniai nelabai supranta, „kodėl taip“ ir spręsdami nelygybes intervalų metodu. Šio metodo nereikia taikyti kvadratinėms nelygybėms spręsti. Tokias nelygybes tikslinga spręsti remiantis kvadratinio trinario grafiko eskizu. Pvz., išspręskime nelygybę $x^2 < x + 6$. Nagrinėkime funkciją $y = x^2 - x - 6$. Trinario $x^2 - x - 6$ šaknys yra -2 ir 3. Parabolės šakos eina į viršų. Vadinasi, trinaris yra neigiamas (tuo pačiu $x^2 < x + 6$), kai $x \in (-2; 3)$.

VIII–XI klasių matematikos vadovėliuose funkcijos sąvoka apibrėžiama keturis kartus:

1) „Matematika 8“ II dalis, p. 77: „Kintamasis y yra kintamojo x funkcija, jeigu kiekvieną kintamojo x reikšmę atitinka vienintelė kintamojo y reikšmė“.

2) „Matematika 9“ I d., 14 p.: „Taisyklė, pagal kurią kiekvienai vieno dydžio reikšmei priskiriama vienintelė kito dydžio reikšmė, vadinama funkcija“.

3) „Matematika 10“ II d. (kurso kartojimas) 115 p.: „Kai vienas dydis (y) priklauso nuo kito dydžio (x) ir kiekvieną x reikšmę atitinka vienintelė y reikšmė, tai tokia priklausomybė vadinama funkcine priklausomybė. Norėdami pažymėti, kad kintamasis y yra kintamojo x funkcija, rašome $y = f(x)$; x – nepriklausomas kintamasis, arba argumentas; y – priklausomas kintamasis, arba funkcija“

4) „Matematika 11“ I d. 24 p.: „Taisyklė, kuri kiekvienai vieno kintamojo reikšmei priskiria vienintelę kito kintamojo reikšmę, vadinama funkcija. Jeigu x yra funkcijos nepriklausomas kintamasis, o y priklausomas kintamasis, tai rašome $y = f(x)$. Dažnai patogu sakyti: „y yra kintamojo x funkcija“. „Matematika 9“ I d. ir „Matematika 11“ I d. funkcijos apbrėžimai yra beveik vienodi. Jei rašome $y = f(x)$, tai čia ir f (taisyklė) funkcija ir y (priklausomas kintamasis) irgi x-so funkcija. Vadinasi, tuo pačiu žodžiu apibrėžiamos (nusakomos) dvi neadekvačios sąvokos.

Be to, jei funkcija – tam tikra taisyklė, tai kaip suprasti sąvokas: didėjanti (mažėjanti), periodinė, atvirkštinė funkcija, funkcijos išvestinė, pirmykštė funkcija. Aišku, čia turima omenyje ne f (taisyklė), bet y (priklausomas kintamasis). Be abejo, tinkamiausias funkcijos apibrėžimas (ten jis pateikiamas kaip paaiškinimas) yra „Matematika 10“ II d. 115 p. Jam neprieštarauja ir „Matematika 8“ II d. 77 p. apibrėžimas.

XI klasėje („Matematika 11“ I d. 176 p.) primityviai ir keistai aiškinama, kaip reikia spręsti logaritmines lygtis. Išsprendus logaritminę lygtį, nustačius jos apibrėžimo sritį ir atmetus sprendinius, kurie nepatenka į apibrėžimo sritį, reikalaujama dar tikrinti ar gautosios nežinomojo reikšmes tikrai yra lygties sprendiniai. Tačiau sprendžiant logaritmines lytis, nežinomojo reikšmės, kurios nėra pradinės lygties sprendiniai atsiranda tik dėl apibrėžimo srities išplėtimo. Kas kita iracionaliosios lygtys. Ten nežinomojo reikšmės netenkinančios pradinės lygties atsiranda ir dėl apibrėžimo srities išplėtimo ir dėl abiejų lygties pusių kėlimo kvadratu (lyginiu laipsniu).

Jei sprendžiant logaritminę lytį gauta nežinomojo reikšmė priklauso lygties apibrėžimo sričiai, tai ji yra pradinės lygties sprendinys ir tikrinti nereikia. Tačiau sprendžiant logaritmines lygtis dažniausiai apibrėžimo srities nustatinėti neverta, o reikia lygtį keisti jai ekvivalenčia mišria (lygties ir nelygybių) sistema. Pvz., lengva įrodyti, kad lygtis

$\lg f(x) = \lg g(x)$ yra ekvivalenti sistemai $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Lygtis $\lg f(x) = \lg g(x) - \lg d(x)$ yra ekvivalenti sistemai $\begin{cases} f(x)d(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Išsprendus lygtį $f(x)d(x) = g(x)$, pakanka patikrinti ar gautos x reikšmės tenkina nelygybės $f(x) > 0$ ir $g(x) > 0$. Tačiau jei nelygybės $f(x) > 0$ ir $g(x) > 0$ yra lengvai išsprendžiamos, tai patogiau jas išspręsti. Tuomet joks patikrinimas nebus reikalingas: nagrinėjamos mišrios sistemos sprendiniai bus ir pradinės lygties sprendiniai.

Jei logaritminės lygtys sprendžiamos gautas nežinomojo reikšmės patikrinant ar jos tinka pradinei lygčiai, tai toks sprendimo būdas visai netinka logaritminių nelygybių sprendimui. „Matematika 11" I d. 180 p. logaritminės nelygybės ir sprendžiamos kitaip nei lygtys, tik nepakankamai racionaliai. Pavyzdžiui nelygybė $\log_4(3x-1) \leqslant \log_4(1-3x)$ ten keičiama sistema $\begin{cases} 3x-1>0, \\ 1-3x>0, \\ 3x-1 \leqslant 1-3x. \end{cases}$

Tačiau nagrinėjamoji nelygybė yra ekvivalenti sistemai $\begin{cases} 3x-1 \leqslant 1-3x, \\ 3x-1>0. \end{cases}$

Matematinius gebėjimus reikia ugdyti mokant matematikos, o ne vien prigalvojant būk tai realaus turinio ar dirbtinų matematikos pritaikymo uždavinių. Lygčių ir nelygybių ekvivalentumo problemos kaip tik labai tinka matematinių gebėjimų ugdymui.

Apskritai naujuose matematikos vadovėliuose ir uždavinynuose per mažai tiriamųjų (kūrybinių) uždavinių. Tik „Matematika 9" II d. yra puikių šios krypties uždavinių.

Rašydami V–X klasių matematikos vadovėlius, autoriai netaupė puslapių (spaudos lankų) V–X klasių vadovėliai ir uždavinynai – 14 knygų, iš kurių dvi („Matematika ir pasaulis" V klasei ir „Matematika ir pasaulis" VI klasei) per didelės ir per sunkios. Vadovėliuose yra klausimų, kuriuos vertėtų praleisti. Pvz., nagrinėjant kampus, gautus dvi tieses perkirtus trečiąja, užtenka priešinių (vietoje vidaus priešinių), vienašalių (vietoje vidaus vienašalių) ir atitinkamųjų kampų sąvokų. L.S. Atanasiano (ir kitų) geometrijos vadovėlyje 7–9 klasei (K., Šviesa, 1991) tai temai skirtas maždaug trečdalis puslapio (53 p.). Gi naujajame vadovėlyje „Matematika 7" II d. 9–10 pp. nagrinėjami atitinkamieji, vidaus priešiniai, išorės priešiniai, vidaus vienašaliai, išorės vienašaliai kampai, ir tam skiriami 3 puslapiai.

Literatūra

[1] J. Teišerskis, *Algebros mokymo metodika*, Mokslas, Vilnius (1988).

Remarks on the reform of mathematical education in a secondary school

J. Teišerskis

The article puts forward the proposals for improvement of the enunciation of some mathematical subjects in the new handbooks of the secondary school.