Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 655-659

Daugiamatės automatinio valdymo sistemos su vėlinimais matematinio modelio tyrimas

Jonas RIMAS (KTU)
el. paštas: jonas.rimas@fmf.ktu.lt

Nagrinėsime lygtį

$$Dx(t) = B_0x(t) + B_1x(t-\tau) + z(t), \tag{1}$$

čia D – apibendrinto diferencijavimo operatorius, $B_0 = -\kappa E$, E – vienetinė n-tosios eilės matrica, κ – koeficientas, $B_1 = \frac{\kappa}{2}B$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

– n-tosios eilės matrica, $x(t)$ – ieškoma vektorinė funkcija, τ – pastovus vėlinimas, $z(t)$ – vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių sąlygų.

(1) matricinė diferencialinė lygtis su vėluojančiu argumentu yra ryšio tinklo sinchronizacijos sistemos (automatinio valdymo sistemos), sudarytos iš n sujungtų į grandinę generatorių, matematinis modelis [1, 2]. Jos sprendinį randame naudodamiesi „žingsnių“ metodu [3]. Intervalą $0 < t < +\infty$ dalijame į dalinius intervalus, kurių ilgiai lygūs vėlinimui τ. Kiekviename daliniame intervale (1) lygtį sprendžiame atskirai. Bet kuriame intervale gautas sprendinys yra pradinė funkcija sprendžiant lygtį tolimesniame intervale. Panaudojus Laplaso transformaciją, (1) lygties sprendinį užrašome taip [2]:

$$x(t) \div \sum_{l=0}^{L} (A^{-1}B_1\mathrm{e}^{-p\tau})^l A^{-1}Z(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau,$$

čia $A = pE - B_0$, $A^{-1} = \frac{1}{p+\kappa}E$, $Z(p) \div z(t)$ ($Z(p)$ – funkcijos $z(t)$ Laplaso transformacija; $\div$ – operatorinės lygybės simbolis, siejantis pirmavaizdį su jo vaizdu – Laplaso transformacija), $L = 0, 1, 2, \ldots$ (baigtiniame intervale $(0; (L+1)\tau)$ sprendinio $x(t)$ vaizdas išreiškiamas suma, turinčia baigtinį dėmenų skaičių; intervale $(0, +\infty)$ sprendinio $x(t)$ vaizdas išreiškiamas funkcijų eilute).

Panaudoję (2) pažymėjimą, turėsime

$$x(t) \div \sum_{l=0}^{L} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{1}{(p+\kappa)^{l+1}} \mathrm{e}^{-pl\tau} B^l Z(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau. \tag{3}$$

Iš čia išplaukia

$$h(t) = (h_{ij}(t)) \div \sum_{l=0}^{L} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{1}{(p+\kappa)^{l+1}} \mathrm{e}^{-pl\tau} B^l, \quad 0 < t < (L+1)\tau, \tag{4}$$

čia $h(t)$ – sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matrica, $h_{ij}(t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ – i-tojo generatoriaus virpesio fazės reakcija į j-tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį.

Rasime pereinamųjų funkcijų išraiškas. Tuo tikslu apskaičiuosime matricos B l-tąjį laipsnį. Skaičiavimus atliksime pasinaudoję formule [4]

$$B^l = TJ^lT^{-1}, \tag{5}$$

čia J – matricos B Žordano forma. T – transformuojančioji matrica. Matricas J ir T rasime, jei žinosime matricos B tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius. Tikrines reikšmes rasime išsprendę charakteristinę lygtį

$$|B - \lambda E| = 0. \tag{6}$$

Pažymėkime

$$D_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & & & & \\ 1 & \alpha & 1 & & 0 & \\ & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \alpha & 1 \\ & & & & 2 & \alpha \end{vmatrix}, \quad \Delta_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & \\ 1 & \alpha & 1 & & 0 & \\ & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \alpha & 1 \\ & & & & 1 & \alpha \end{vmatrix}, \tag{7}$$

čia $\alpha \in R$. Tada

$$|B - \lambda E| = D_n(-\lambda). \tag{8}$$

Iš (7) išplaukia

$$D_n(\alpha) = (\alpha^2 - 4)\Delta_{n-2}(\alpha) \tag{9}$$

ir

$$\Delta_n(\alpha) = \alpha\Delta_{n-1}(\alpha) - \Delta_{n-2}(\alpha) \quad (\Delta_2 = \alpha^2 - 1,\ \Delta_1 = \alpha,\ \Delta_0 = 1). \tag{10}$$

Išsprendę (10) skirtuminę lygtį, randame $\Delta_n(\alpha) = U_n\big(\frac{\alpha}{2}\big)$,

$$D_n(\alpha) = (\alpha^2 - 4)U_{n-2}\Big(\frac{\alpha}{2}\Big), \tag{11}$$

čia $U_n(x)$ yra n-tojo laipsnio antrojo tipo Čebyševo daugianaris.

Visi daugianario $U_n(x)$ nuliai yra intervale $[-1, 1]$ ir gali būti surasti naudojantis formule [5]

$$x_{nk} = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Tai išplaukia iš žinomos lygybės

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sin\arccos x}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{13}$$

Remdamiesi (8), (11) ir (12) išraiškomis, užrašome (6) charakteristinės lygties šaknis (matricos B tikrines reikšmes) [4]:

$$\lambda_k = -2\cos\frac{(k-1)\pi}{n-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{14}$$

Toliau nagrinėsime atvejį kai n nelyginis skaičius, t.y., $n = 2p + 1$, $p \in N$.

Rasime matricos B Žordano formą (matricą J). Visos tikrinės reikšmės λ_i $(i = \overline{1, n})$ yra paprastosios, todėl kiekvienai jų matricoje J atitiks viena Žordano ląstelė $J_1(\lambda_i)$. Įvertinę tai ir pasinaudoję atitiktimi

$$\lambda_k = -\lambda_{n-k+1} \quad \Big(k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\Big), \tag{15}$$

užrašome matricos B Žordano formą:

$$J = \operatorname{diag}\big(-\lambda_n - \lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} - \cdots - \lambda_{\frac{n-1}{2}}\ 0\ \lambda_{\frac{n+3}{2}} \ldots . \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n\big). \tag{16}$$

Remdamiesi lygybe $J = T^{-1}BT$, randame matricą T ir jai atvirkštinę matricą T^{-1}. Apskaičiuojame matricos B l-ąjį laipsnį:

$$B^l = TJ^lT^{-1} = \frac{1}{2n-2}Q(l) = \frac{1}{2n-2}(q_{ij}(l)), \tag{17}$$

čia

$$q_{ij}(l) = \big(1 + (-1)^{l+i+j}\big)\alpha_j \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \beta_k(\lambda_k)^l T_{i-1}\Big(\frac{\lambda_k}{2}\Big)T_{j-1}\Big(\frac{\lambda_k}{2}\Big), \tag{18}$$

$$i, j = \overline{1, n}, \quad \alpha_j = \begin{cases} 1, & \text{kai } j = \overline{1, n}, \\ 2, & \text{kai } 1 < j < n; \end{cases} \qquad \beta_k = \begin{cases} 1, & \text{kai } k = 1, n, \\ 2, & \text{kai } 1 < k < n; \end{cases}$$

λ_k ($k = \overline{1,n}$) – matricos B tikrinės reikšmės, $n = 2p+1$ ($p \in N$) – matricos B eilė, $T_m(x)$ – m-tojo laipsnio pirmojo tipo Čebyševo daugianaris.

Įstatę (17) į (4) ir atlikę reikiamus pertvarkymus, randame sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matricą:

$$h(t) = \big(h_{ij}(t)\big) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

čia

$$h_{ij}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\kappa t} 1(t) + g_{ij}(t), & i = j, \\ g_{ij}(t), & i \neq j; \end{cases} \qquad 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

vienetinė funkcija,

$$g_{ij}(t) = \frac{1}{2n-2} \sum_{l=1}^{L} q_{ij}(l) \Big(\frac{\kappa}{2}\Big)^l \frac{(t - l\tau)^l}{l!} \mathrm{e}^{-\kappa(t - l\tau)} 1(t - l\tau), \tag{20}$$
$$i, j = \overline{1,n}; \quad 0 < t < (L+1)\tau.$$

Panaudoję gautas išraiškas, galima rasti pereinamųjų funkcijų matricą tarpusavio sinchronizacijos sistemai, sudarytai iš n ($n = 2p+1$, $p \in N$) sujungtų į grandinę generatorių. Pavyzdžiui, jei $n = 3$, gautume

$$J = \operatorname{diag}(-\lambda_3 0 \lambda_3) = \operatorname{diag}(-202),$$
$$B^l = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_2 \\ a_3 & 2a_2 & a_1 \end{pmatrix};$$
$$a_1(l) = 2^l \Big[1 + (-1)^l\Big], \quad a_2(l) = 2^l \Big[1 - (-1)^l\Big],$$
$$a_3(l) = 2^l \Big[1 + (-1)^l\Big], \quad a_4(l) = 2^{l+1} \Big[1 + (-1)^l\Big],$$
$$h(t) = \big(h_{ij}(t)\big) = \begin{pmatrix} h_1 & 2h_2 & h_3 \\ h_2 & h_4 & h_2 \\ h_3 & 2h_2 & h_1 \end{pmatrix},$$
$$h_i(t) = \mathrm{e}^{-\kappa t} 1(t) + g_i(t), \quad i = 1, 4, \quad h_i(t) = g_i(t), \quad i = 2, 3,$$
$$g_i(t) = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{L} a_i(l) \Big(\frac{\kappa}{2}\Big)^l \frac{(t - l\tau)^l}{l!} \mathrm{e}^{-\kappa(t - l\tau)} 1\,(t - l\tau),$$
$$i = \overline{1,4}, \quad 0 < t < (L+1)\,\tau.$$

Jeigu $n = 5$, turėtume

$$J = \operatorname{diag}(-\lambda_5 \; -\lambda_4 \; 0 \; \lambda_4 \; \lambda_5) = \operatorname{diag}(-2 \; -a \; 0 \; a \; 2), \quad a = \sqrt{2},$$

$$B^l = \frac{1}{8}(q_{ij}) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 & 2a_3 & 2a_4 & a_5 \\ a_2 & a_6 & a_7 & a_8 & a_4 \\ a_3 & a_7 & a_9 & a_7 & a_3 \\ a_4 & a_8 & a_7 & a_6 & a_2 \\ a_5 & 2a_4 & 2a_3 & 2a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

$$a_1(l) = (2^l + a^{l+2})[1 + (-1)^l], \quad a_2(l) = (2^l + a^{l+1})\left[1 - (-1)^l\right],$$

$$a_3(l) = 2^l\left[1 + (-1)^l\right], \quad a_4(l) = (2^l - a^{l+1})\left[1 - (-1)^l\right],$$

$$a_5(l) = (2^l - a^{l+2})\left[1 + (-1)^l\right], \quad a_6(l) = (2^{l+1} + a^{l+2})\left[1 + (-1)^l\right],$$

$$a_7(l) = 2^{l+1}\left[1 - (-1)^l\right], \quad a_8(l) = (2^{l+1} - a^{l+2})\left[1 + (-1)^l\right],$$

$$a_9(l) = 2^{l+1}\left[1 + (-1)^l\right],$$

$$h(t) = (h_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} h_1 & 2h_2 & 2h_3 & 2h_4 & h_5 \\ h_2 & h_6 & h_7 & h_8 & h_4 \\ h_3 & h_7 & h_9 & h_7 & h_3 \\ h_4 & h_8 & h_7 & h_6 & h_2 \\ h_5 & 2h_4 & 2h_3 & 2h_2 & h_1 \end{pmatrix},$$

$$h_i(t) = \mathrm{e}^{-\kappa t}1(t) + g_i(t), \quad i = 1, 6, 9, \quad h_i(t) = g_i(t), \quad i = \overline{2,5} \text{ ir } i = 7, 8,$$

$$g_i(t) = \frac{1}{8}\sum_{l=1}^{L} a_i(l)\left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{(t - l\tau)^l}{l!}\mathrm{e}^{-\kappa(t-l\tau)}1(t - l\tau), \quad i = \overline{1,9}.$$

Gautos tikslios analizinės pereinamųjų funkcijų išraiškos gali būti panaudotos sistemos dinamikai tirti, jos statistinėms charakteristikoms skaičiuoti, perdavimo funkcijoms ir dažninėms charakteristikoms rasti.

Literatūra

[1] W.C. Lindsey, J.H. Chen, Mutual clock synchronization in global digital communication networks, *Euro. Trans. Telecommun.*, **7**(1), 25–37 (1996).
[2] J.Z. Rimas, Issledovanie dinamiki sistem vzaimnoj sinchronizacii, *Radiotechnika*, **32**(2), 3–9 (1977).
[3] A.D. Myshkis, *Lineinyje diferencialnyje uravnenija s zapazdyvajushchim argumentom*, Nauka (1972).
[4] R. Hornn, Ch. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge university press (1986).
[5] S. Paškovskij, *Vyčislitelnyje primenenija mnogočlenov i riadov Čebyševa*, Maskva (1983).

Investigation of the matematical model of the multimensional automatic control system with delays

J. Rimas

The mathematical model of the mutual synchronisation system composed of $n = 2p + 1$ $(p \in N)$ joined into a chain oscillators is investigated. The precise analytical expressions of the elements of the step responses matrix of the system are obtained.