

## Apie Lerch'o dzeta funkcijos išvestinės nilius

Ramūnas GARUNKŠTIS (VU)\*

el. paštas: ramunas.garunkstis@mif.vu.lt

Darbai [3], [4] iliustruoja, kad Rymano dzeta funkcijos nulių išsibarstymas yra susijęs su jos išvestinės nulių savybėmis. Tai mus paskatino nagrinėti bendresnės, Lercho dzeta funkcijos išvestinės nilius. Tegu  $s = \sigma + it$  yra kompleksinis kintamasis. Lerch'o dzeta funkcija  $L(\lambda, \alpha, s)$ , kai  $\sigma > 1$ , apibrėžiama Dirichlet eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m + \alpha)^s},$$

čia  $0 < \lambda, \alpha \leq 1$ . Ši funkcija pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, gal būt išskyrus tašką  $s = 1$ , ir, kai  $\lambda$  nėra sveikasis skaičius, tenkina funkcinę lygtį

$$L(\lambda, \alpha, 1 - s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \left( \exp \left\{ \frac{\pi i s}{2} - 2\pi \alpha \lambda \right\} L(-\alpha, \lambda, s) + \exp \left\{ -\frac{\pi i s}{2} + 2\pi \alpha (1 - \lambda) \right\} L(\alpha, 1 - \lambda, s) \right). \quad (1)$$

Toliau mes tarsime, kad  $0 < \lambda, \alpha < 1$ . Darbe [1] buvo įrodyta,  $L(\lambda, \alpha, s) \neq 0$ , jei  $\sigma \geq 1 + \alpha$ . Apibrėžkime

$$L'(\lambda, \alpha, s) = \frac{\partial}{\partial s} L(\lambda, \alpha, s).$$

**1 teorema.** Tegu  $0 < \lambda, \alpha < 1$ . Jei  $\sigma \geq \max(2; 1, 5 - \log \log \alpha^{-1})$ , tai  $L'(\lambda, \alpha, s) \neq 0$ .

*Įrodymas.* Turime

$$-\frac{\alpha^\sigma}{\log \alpha} L'(\lambda, \alpha, s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i \lambda n} \frac{\log(n + \alpha)}{\log \alpha} \left( \frac{\alpha}{n + \alpha} \right)^\sigma.$$

Pastarojoje lygybėje suma savo absoliučiu dydžiu yra ne didesnė už

$$\frac{\log(1 + \alpha)}{\log \alpha^{-1}} \left( \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^\sigma + \frac{\alpha^\sigma}{\log \alpha^{-1}} \int_1^{\infty} \frac{\log(x + \alpha)}{(x + \alpha)^\sigma} dx \leq \frac{3 \log 2 + 2}{\log \alpha^{-1}} \left( \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^\sigma,$$

\*Darbas remiamas Lietuvos mokslo ir studijų fondo.

jei  $\sigma \geq 2$ . Lengva patikrinti, kad paskutinės nelygybės dešinioji pusė yra mažesnė už vieneta, jei teoremos sąlygos patenkinamos. Teorema įrodyta.

Išdiferencijavę (1) funkcinę lygtį gauname,

$$\begin{aligned} -L'(\lambda, \alpha, 1-s) &= (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \left( e^{2\pi i(\frac{s}{4} - \alpha\lambda)} (L'(-\alpha, \lambda, s) \right. \\ &\quad \left. + L(-\alpha, \lambda, s) \left( \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \log 2\pi + \frac{\pi i}{2} \right) \right) \\ &\quad + e^{2\pi i(-\frac{s}{4} + \alpha(1-\lambda))} \left( L'(\alpha, 1-\lambda, s) \right. \\ &\quad \left. + L(\alpha, 1-\lambda, s) \left( \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \log 2\pi - \frac{\pi i}{2} \right) \right) \Big). \end{aligned}$$

Iš Stirlingo formulės, kai  $|t| > 1$ , išplaukia,

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \log 2\pi \pm \frac{\pi i}{2} = \log \left( \frac{|t|}{2\pi} \exp \left( \pm \frac{\pi i}{2} \right) \right) + O\left(\frac{1}{|t|}\right).$$

Todėl, panašiai kaip ir  $L(\lambda, \alpha, s)$  atveju (žr. [1]), sakysime, kad  $\rho' = \beta' + i\gamma'$  yra netrivialus  $L'(\lambda, \alpha, s)$  nulis, jei

$$\begin{aligned} \min(-1; 2,5 + \log \log \lambda^{-1}; 2,5 + \log \log(1-\lambda)^{-1}) \\ < \beta' < \max(2; 1,5 - \log \log \alpha^{-1}). \end{aligned}$$

Tegu  $N'(T, \lambda, \alpha)$  žymi kiekį netrivialių nulių, kuriems  $|\gamma'| \leq T$  (įskaičiuojant kartotinumus). Darbe [2] gauta,

$$N'(T, \lambda, \alpha) = \frac{T}{\pi} \log \frac{T}{2\pi\epsilon\alpha\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} + o(T). \quad (2)$$

Pažymėkime  $N'(\sigma, T; \lambda, \alpha)$  kiekį netrivialių nulių, kuriems  $\beta' > \sigma$  ir  $|\gamma'| \leq T$  (įskaičiuojant kartotinumus). Kita teorema parodo, kad „daug“ Lerch'o dzeta išvestinės nulių yra dešiniau kritinės tiesės.

**2 teorema.** Tegu  $0 < \lambda, \alpha < 1$ ,  $0 < c < 1$  ir tegu  $\omega = \max(2; 1,5 - \log \log \alpha^{-1})$ . Tuomet

$$N' \left( \frac{1}{2} + \frac{c \log \log T}{\log T}, T; \lambda, \alpha \right) \geq \frac{(1-c)}{(\omega - \frac{1}{2})\pi} T \log \log T + O(T).$$

*Įrodymas.* Straipsnyje [2] įrodyta, kad

$$\sum_{|\gamma'| \leq T} (b + \beta') = \left( b + \frac{1}{2} \right) \frac{T}{\pi} \log \frac{T}{2\pi\epsilon\alpha\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{T}{2\pi} \log \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} - \frac{T}{\pi} \log \log \frac{1}{\alpha} \\
 & + \frac{T}{2\pi} \log \left( \left( \log \frac{T}{2\pi} \right)^2 + \frac{\pi}{2} \right) + o(T),
 \end{aligned}$$

kur  $b > \max(1; -2.5 - \log \log \lambda^{-1}; -2.5 - \log \log(1 - \lambda)^{-1})$ . Iš pastarosios lygybės atėmę (2) lygybę, padauginą iš

$$b + \frac{1}{2} + \frac{c \log \log T}{\log T},$$

gauname, jog

$$\sum_{|\gamma'| \leq T} \left( \beta' - \frac{1}{2} - \frac{c \log \log T}{\log T} \right) = \frac{1-c}{\pi} \log \log T + O(T).$$

Iš čia ir iš nelygybių, gautų remiantis 1 teorema,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{|\gamma'| \leq T \\ \beta' > \frac{1}{2} + \frac{c \log \log T}{\log T}}} 1 & \geq \sum_{\substack{|\gamma'| \leq T \\ \beta' > \frac{1}{2} + \frac{c \log \log T}{\log T}}} \frac{\beta' - \frac{1}{2} - \frac{c \log \log T}{\log T}}{\omega - \frac{1}{2} - \frac{c \log \log T}{\log T}} \\
 & \geq \frac{1}{\omega - \frac{1}{2}} \sum_{|\gamma'| \leq T} \left( \beta' - \frac{1}{2} - \frac{c \log \log T}{\log T} \right)
 \end{aligned}$$

gauname 2 teoremos tvirtinimą.

## Literatūra

- [1] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, On zeros of the Lerch zeta-function, S. Kanemitsu, K. Györy (eds.), *Number Theory and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, 129–143 (1999).
- [2] R. Garunkštis, J. Steuding, On the zero distributions of Lerch zeta-functions, *Analysis*, **22**, 1–12(2002).
- [3] N. Levinson, H.L. Montgomery, Zeros of the derivative of the Riemann zeta-function, *Acta Math.*, **133**, 49–65 (1974).
- [4] A. Speiser, Geometrisches zur Riemannsches Zetafunktion, *Math. Annalen*, **110**, 514–521 (1934).

## On zeros of the derivative of the Lerch zeta-function

R. Garunkštis

We consider zeros of the derivative of the Lerch zeta-function. We obtain some lower bound for the number of zeros lying on the right from the critical line.