Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 87–92

Asimptotiniai skleidiniai didžiųjų nuokrypių lokaliojoje teoremoje

Rimantas SKRABUTĖNAS (VPU)
el. paštas: rimantas.skrabutenas@vpu.lt

Užbaigdami straipsnių seriją [4–8], kurioje nuosekliai atsakome į Pietų Afrikos matematiko J. Knopfmacherio monografijoje [1] iškeltus klausimus (Open Questions), pateikiamame straipsnyje įrodysime patikslintą didžiųjų nuokrypių lokaliąją ribinę teoremą multiplikatyviosioms funkcijoms, apibrėžtoms J. Knopfmacherio įvestoje specialioje pusgrupėje G.

Didžiųjų nuokrypių lokaliąją teoremą multiplikatyviosioms funkcijoms pirmasis įrodė E. Manstavičius [2]. Savo ruožtu, asimptotinis pagrindinio nario skleidinys didžiųjų nuokrypių teoremoje multiplikatyviosioms funkcijoms pirmą kartą buvo gautas autoriaus straipsnyje [3]. Darbe [8] parodėme, kad, kai multiplikatyvioji funkcija apibrėžta minėtoje specialioje pusgrupėje G, didžiųjų nuokrypių teoremos analogas išlaiko visus specifinius, natūraliųjų skaičių pusgrupei nebūdingus momentus, kurie jau išryškėjo darbuose [5–7].

Trumpai priminsime tiriamosios multiplikatyviųjų funkcijų klasės $M(G)$ apibrėžimą ir svarbiausius žymenis (detaliau žr. [6–8]).

Adicinę aritmetinę pusgrupę G generuoja skaiti pirminių elementų p aibė P. Visiškai adityvioji (laipsnio) funkcija δ: $G \to N \cup \{0\}$ yra tokia, kad, su kiekvienu $p \in P$, $\delta(p) \geqslant 1$ ir egzistuoja tokios konstantos $A > 0$, $q > 1$, $0 \leqslant \nu < 1$, kad galioja aksioma

$$G(n) := Card\{a \in G; \delta(a) = n\} = Aq^n + \mathrm{O}(q^{\nu n}).$$

APIBRĖŽIMAS. Multiplikatyvioji funkcija g: $G \to R$ priklauso klasei $M(G)$, jei su visais galimais $\nu \in R$ yra tenkinamos sąlygos

$$\sum_{p\in P,\ \delta(p)=l,\ g(p)=\nu} 1 = \pi(l)\left(\lambda_\nu + \rho_\nu(l)\right), \quad \nu \in R, \quad l \geqslant 1, \quad \pi(l) = \sum_{p\in P,\ \delta(p)=l} 1.$$

Čia $\lambda_\nu \in [0,1]$ – konstantos, o $\rho_\nu(l)$ – liekamieji nariai. Be to, $\rho_\nu(l) =: C_\nu(l)l^{-\alpha}$ su konstanta $a > 0$ ir (tolygiai su visais $l \geqslant 1$) konverguojančia eilute $\sum_\nu |C_\nu(l)|$.

Svarbesni žymenys: $k=0,1$; $\lambda := \sqrt{\log n}$.

$$\chi_k := \chi_k(t) = \sum_{\nu,\ \nu\neq 0} \lambda_\nu |\nu|^{it}\mathrm{sgn}^k\nu; \quad E_{kj} := \sum_{\nu,\ \nu\neq 0} \lambda_\nu \mathrm{sgn}^k\nu \log^j|\nu|;$$

$$\gamma_k = \sum_{\nu,\ \nu\neq 0} \lambda_\nu \mathrm{sgn}^k\nu; \quad \sigma_k^2 = \sum_{\nu,\ \nu\neq 0} \lambda_\nu \mathrm{sgn}^k\nu \log^2|\nu|;$$

$$y_k = \frac{\log|m| - E_{k1}\lambda^2}{\lambda}; \quad \eta_k(t) = \sum_{\nu,\ \nu\neq 0} \lambda_\nu \mathrm{sgn}^k\nu \cos(t\log|\nu|);$$

$$A_1 := \frac{1}{A}\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{||p||}\right)^{-1}\left(1-\frac{(-1)^{\delta(p)}}{||p||}\right)^{-1}, \quad ||p|| = q^{\delta(p)}.$$

Skaičiai t_0 ir τ_0 žymi lygčių $\eta_0(t) = \gamma_0$ ir $\eta_1(\tau) = -\gamma_1$ sprendinius iš intervalo $[-\pi,\pi]$. Nesunkiai parodoma ([3]), kad abiem atvejais tėra baigtinis tokių sprendinių skaičius. Paprastumo dėlei čia nenagrinėjome atvejų, kai $t_0 = \pm\pi$. Simbolis $I(G)$ žymi pusgrupės G generuojančios funkcijos išskirtinio nulio $y = -q^{-1}$ indikatorių.

Lokaliosiose teoremose klasės $M(G)$ m. funkcijoms, įrodytuose straipsniuose [6–8], pagal analogiją su tikimybių teorija, buvo nuosekliai plečiama netrivialumo zona. Straipsnyje [7] gautas pagrindinio nario asimptotinis skleidinys λ^{-1} laipsniais. Darbe [8] klasės $M(G)$ funkcijoms įrodyta *didžiųjų nuokrypių lokalioji teorema*. Ji išryškina tolesnes analogijas su ankstesniais autoriaus darbais (šiuo atveju, su [3]), kuriuose buvo nagrinėjamos natūraliųjų skaičių pusgrupėje apibrėžtos aritmetinės funkcijos.

Parodysime, kad pastarąjį rezultatą galima patikslinti, nesiaurinant tiriamųjų funkcijų klasės. Taikydami Melino transformacijas, naudosime žymenį $f_k(a,t,u) := |g(a)|^{\log(1+u)+it}\mathrm{sgn}^k g(a)$.

Teorema. *Tarkime multiplikatyvioji funkcija $g \in M(G)$, $\sigma_0^2 > 0$ ir $\log|g(a)|$ su visais $a \in G$ tokiais, kad $g(a) \neq 0$, įgija tik sveikąsias reikšmes. Be to, egzistuoja konstanta $c > 0$, su kuria eilutės*

$$\sum_{\nu,\ \nu\neq 0} \mathrm{e}^{c|\log|\nu||}\lambda_\nu, \qquad \sum_{p,j\geqslant 2,\ g(p^j)\neq 0} \mathrm{e}^{c|\log|g(p^j)||}q^{-j\delta(p)}, \qquad \sum_{\nu,\ \nu\neq 0} \mathrm{e}^{c|\log|\nu||}|C_\nu(l)|$$

konverguoja (pastaroji tolygiai su visais $l \geqslant 1$). Tada, kai $|m| = n^{E_{01}+o(1)}$ ir $n \to \infty$, su bet kokiu fiksuotu natūraliuoju r yra teisinga asimptotinė formulė

$$\begin{aligned}\nu_n(m) &:= \frac{1}{Aq^n} Card\{a \in G;\ \delta(a) = n,\ g(a) = m\} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \frac{\mathrm{sgn}^k m \exp\{\lambda^2 A(\xi_0)\}}{2\lambda n^{1-\gamma_0}\Gamma(\gamma(\xi_0))} \sum_{t_0} \mathrm{e}^{-it_0\log|m|} H_r(f_k, t_0, \xi_0) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{1} \frac{\mathrm{sgn}^k m \exp\{\lambda^2 A(\xi_0)\}}{2\lambda n^{1-\gamma_0}\Gamma(\gamma(\xi_0))} \sum_{\tau_0} \mathrm{e}^{-i\tau_0\log|m|} W_r(f_k, \tau_0, \xi_0) + O(n^{-\beta}).\end{aligned}$$

Čia $\beta = \beta(\alpha)$ *yra konstanta;* $\xi := \frac{\log|m|}{\lambda^2} - E_{01}$,

$$A(\xi_0) := \gamma(\xi_0) - \gamma_0 - (E_{01} + \xi)\ln(1+\xi_0), \quad \gamma(\xi_0) := \sum_{\nu,\ \nu\neq 0} (1+\xi_0)^{\log|\nu|}\lambda_\nu,$$

o ξ_0 *yra vienintelis lygties* $u(x) = 0$ *su*

$$u(x) := \sum_{\nu,\ \nu\neq 0} \left((1+x)^{\log|\nu|} - 1\right)\lambda_\nu - \xi$$

sprendinys intervale $\left(0, \frac{2\xi}{\sigma_0^2}\right)$. *Pažymėjus*

$$R_k(t_0,\xi_0) = A^{\gamma(\xi_0)-1} \prod_{p\in P}\left(1 - \frac{1}{||p||}\right)^{\gamma(\xi_0)} \sum_{j\geqslant 0,\ g(p^j)\neq 0} \frac{f_k(p^j, t_0, \xi_0)}{||p||^j},$$

$$T_k(\tau_0,\xi_0)$$
$$= (-1)^n \frac{I(G)}{A} A^{-\gamma(\xi_0)-1} \prod_{p\in P}\left(1 - \frac{(-1)^{\delta(p)}}{||p||}\right)^{-\gamma(\xi_0)} \sum_{j\geqslant 0,\ g(p^j)\neq 0} \frac{(-1)^{\delta(p)} f_k(p^j, \tau_0, \xi_0)}{||p||^j},$$

pagrindinį narį sudarantys dėmenys $H_r(f_k, t_0, \xi_0)$ *ir* $W_r(f_k, \tau_0, \xi_0)$ *užrašomi šitaip:*

$$H_r(f_k, t_0, \xi_0) = R_k(t_0,\xi_0)\left(\sum_{j=0}^{r} \frac{P_{kj}(\sigma_0, t_0, \xi_0)}{\lambda^j} + O\left(\lambda^{-r-1}\right)\right),$$
$$W_r(f_k, \tau_0, \xi_0) = T_k(\tau_0,\xi_0)\left(\sum_{j=0}^{r} \frac{Q_{kj}(\sigma_0, \tau_0, \xi_0)}{\lambda^j} + O\left(\lambda^{-r-1}\right)\right).$$

Čia $P_{kj}(u, t_0, \xi_0)$ *ir* $Q_{kj}(u, \tau_0, \xi_0)$ *yra polinomai nuo* u, *kurių koeficientai išsireiškia konverguojančiomis funkcijų* $f_k(a, t, u)$ *reikšmių taškuose* (p^j, t_0, ξ_0) *ir* (p^j, τ_0, ξ_0) *sumomis ir sandaugomis.* $P_{kj}(\sigma_0, t_0, \xi_0)$ *ir* $Q_{kj}(\sigma_0, \tau_0, \xi_0)$ *gaunami iš* $P_{kj}(u, t_0, \xi_0)$ *ir* $Q_{kj}(u, \tau_0, \xi_0)$ *lyginius laipsnius* u^l *pakeičiant dydžiais*

$$\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)\cdot 2^{\frac{l+1}{2}}\cdot\sigma_0^{-l-1}(\xi_0), \quad \sigma_0^2(\xi_0) := \sum_{\nu,\ \nu\neq 0} (1+\xi_0)^{\log|\nu|}\lambda_\nu \log^2|\nu|,$$

o nelyginius – nuliu.

Įrodymo eigoje polinomus $P_{kj}(\sigma_0, t_0, \xi_0)$ ir $Q_{kj}(\sigma_0, \tau_0, \xi_0)$ aprašysime kiek detaliau.

Įrodymas. Pirmieji žingsniai sutampa su tais, kurie buvo atlikti darbe [8]. Trumpai juos priminsime. Funkcijoms $f_k(a, t, u)$ pritaikę straipsnyje [4] įrodytą teoremą apie multiplikatyviųjų funkcijų reikšmių sumavimą, gauname:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{Aq^n}\sum_{\delta(a)=n} f_k(a,t,0) = \frac{(An)^{\chi_k-1}}{\Gamma(\chi_k)}\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{\|p\|}\right)^{\chi_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f_k(p^j,t,0)}{\|p\|^j} \\
&+I(G)\frac{(-1)^n A_1^{\chi_k} n^{-\chi_k-1}}{A\Gamma(-\chi_k)}\prod_{p\in P}\left(1-\frac{(-1)^{\delta(p)}}{\|p\|}\right)^{\chi_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j\delta(p)} f_k(p^j,t,0)}{\|p\|^j} \\
&+\mathrm{O}\left(n^{-\alpha}\log n\right) \\
&=: \frac{(An)^{\chi_k}}{\Gamma(\chi_k)} h_{k1}(t) + I(G)\frac{(-1)^n A_1^{\chi_k} n^{-\chi_k-1}}{A\Gamma(-\chi_k)} h_{k2}(t) + \mathrm{O}\left(n^{-\alpha}\log n\right).
\end{aligned}
$$

Iš standartinės formulės

$$
\nu_n(m) = \frac{1}{4\pi Aq^n}\sum_k \operatorname{sgn}^k m \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-it\log|m|}\sum_{\delta(\alpha)=n} f_k(a,t,0)\,\mathrm{d}t
$$

atlikę pakeitimus $t \to t+t_0$, $t \to \tau+\tau_0$, gauname išraišką:

$$
\nu_n(m) = \sum_k \operatorname{sgn}^k m\cdot J_{kj} + \mathrm{O}\left(n^{-\alpha}\log n\right), \quad j=1,2.
$$

$$
\begin{aligned}
J_{k1} &:= \sum_{t_0} J_{k1}(t_0); \\
J_{k1}(t_0) &:= \frac{\mathrm{e}^{-it_0\log|m|}}{4\pi n^{\lambda_0}}\int_{D_1(0)} L_{k1}(t+t_0)\exp\left\{\lambda^2\mu_{k1}(t) - ity_k\lambda\right\}\mathrm{d}t; \\
J_{k2} &:= \sum_{\tau_0} J_{k2}(\tau_0); \\
J_{k2}(\tau_0) &:= I(G)\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{-i\tau_0\log|m|}}{4\pi An^{\lambda_0}}\int_{D_2(0)} L_{k2}(\tau+\tau_0)\exp\left\{\lambda^2\mu_{k1}(\tau) - i\tau y_k\lambda\right\}\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

Čia $D_k(0)$, $k=0,1$ yra nulio taško aplinkos, o

$$
\begin{aligned}
&L_{k1}(t) := \frac{A^{\chi_k(t)-1}}{\Gamma(\chi_k(t))} h_{k1}(t), \quad L_{k2}(\tau) := \frac{A^{\chi_k(\tau)}}{\Gamma(-\chi_k(\tau))} h_{k2}(\tau), \\
&\mu_{k1}(u) := \chi_k(u) - \gamma_0 - itE_{k1}, \quad \mu_{k2}(u) := \chi_k(u) - \gamma_0 - iuE_{k2}.
\end{aligned}
$$

Kaip ir straipsniuose [7–8], parodoma, kad netrivialus yra tik atvejis $\gamma_1 = \gamma_0$, $\chi_1(u) = \chi_0(u)$, $E_{11} = E_{01}$, $y_1 = y_0$, $\sigma_1 = \sigma_0$.

Suformuluotos teoremos sąlygos įgalina analiziškai pratęsti pointegralines funkcijas $L_{k1}(t+t_0)$ ir $L_{k2}(\tau+\tau_0)$. Kadangi lygtis $u(x) = 0$ nulio taško aplinkoje turi vienintelį sprendinį (balno tašką) ξ_0, tai, atlikus pakeitimą $it \to z := \log(1+\xi_0)+it$, kiekviename iš integralų išskiriame tuo balno tašku nustatomą daugiklį $\exp\left\{\lambda^2 A(\xi_0)\right\}$, su

$$A(\xi_0) := \sum_{\nu,\ \nu\neq 0} (1+\xi_0)^{\log|\nu|}\lambda_\nu - \gamma_0 - (E_{01}+\xi)\log(1+\xi_0).$$

Tada, pavyzdžiui integralo $J_{01}(t_0)$ atveju, gauname

$$J_{01}(t_0) := \frac{e^{-it_0\log|m|}\exp\left\{\lambda^2 A(\xi_0)\right\}}{4\pi n^{\lambda_0}} \int\limits_{D_1(0)} L_{k1}(t+t_0,\xi_0)\exp\left\{\lambda^2 (B(\xi_0,t))\right\} dt.$$

Čia $B(\xi_0,t) := \mu_{01}(t,\xi_0) - z\xi - A(\xi_0)$,

$$\mu_{01}(t,\xi_0) := \sum_{\nu,\ \nu\neq 0} |\nu|^z \lambda_\nu - \gamma_0 - E_{01}z =: \chi_0(t,\xi_0) - \gamma_0 - E_{01}z,$$

$$L_{01}(t+t_0,\xi_0) := \frac{A^{\chi_0(t,\xi_0)-1}}{\Gamma(\chi_0(t,\xi_0))} h_{01}(t+t_0,\xi_0),$$

$$h_{01}(t+t_0,\xi_0) := \prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{||p||}\right)^{\chi_0(t,\xi_0)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_k(p^j,t,\xi_0)}{||p||^j}.$$

Liekamųjų narių integraluose J_{kj} įverčiai gaunami iš esmės taip pat, kaip ir darbe [3], todėl čia detaliau aptarsime tik pagrindinio nario išraišką.

Teoremos sąlygos įgalina pointegralines funkcijas skleisti Teiloro eilutėmis su bet kokiu fiksuotu narių skaičiumi r. Pavyzdžiui, integralo $J_{01}(t_0)$ atveju, panaudodami pagrindinę teoremos sąlygą, paeiliui gautume tokius skleidinius:

$$\chi_0(t,\xi_0) := \sum_{\nu,\ \nu\neq 0} (1+\xi_0)^{\log|\nu|} e^{it\log|\nu|}\lambda_\nu = \gamma(\xi_0) + \sum_{j=1}^{r} d_j(\xi_0)(it)^j + O\left(|t|^{r+1}\right),$$

$$A^{\chi_0(t,\xi_0)-1} = A^{\gamma(\xi_0)-1} + \sum_{j=1}^{r} a_j(\xi_0)(it)^j + O\left(|t|^{r+1}\right),$$

$$d_1(\xi_0) := \sum_{\nu,\ \nu\neq 0} \lambda_\nu (1+\xi_0)^{\log|\nu|}\log|\nu|, \quad a_1(\xi_0) := d_1(\xi_0)\log A,$$

$$\Gamma^{-1}(\chi_0(t,\xi_0)) = \Gamma^{-1}(\gamma(\xi_0))\exp\left(1+\sum_{j=0}^{r} b_j(\xi_0)(it)^j + O\left(|t|^{r+1}\right)\right),$$

$$A^{\chi_0(t,\xi_0)-1} h_{01}(t+t_0,\xi_0) := R_k(t_0,\xi_0)\exp\left\{\sum_{j=1}^{r} c_j(\xi_0,t_0)(it)^j + O\left(|t|^{r+1}\right)\right\}.$$

Kadangi, kai $n \to \infty$, $\xi_0 \to 0$, tai, pakankamai dideliems n, yra teisingas įvertis $\sigma_0^2(\xi_0) = \sigma_0^2 + O(\xi_0) > 0$. Todėl, atlikę analogiškus skaičiavimus kaip ir darbe [3], aplinkoje $|t| \leqslant \varepsilon\lambda$ su pakankamai maža teigiama konstanta ε, suderinta su teoremos sąlygoje aptarta konstanta c, pointegralinę funkciją galėsime užrašyti pavidalu:

$$L_{01}\left(\log(1+\xi_0)+\frac{it}{\lambda}+t_0,\xi_0\right)\exp\left\{\lambda^2 B\left(\xi_0,\frac{t}{\lambda}\right)\right\}$$
$$=\frac{R_k(t_0,\xi_0)}{\Gamma(\gamma(\xi_0))}\exp\left\{-\sigma_0^2(\xi_0)t^2\right\}\cdot\left\{\sum_{j=0}^{r}\frac{P_{kj}(it,t_0,\xi_0)}{\lambda^j}+\mathrm{O}\left(\frac{|t|^{3r+3}}{\lambda^{r+1}}\right)\right\},$$

kuriame pasirodantys polinomai $P_{kj}(u,t_0,\xi_0)$ gaunami skleidžiant it laipsniais funkciją

$$\exp\left\{\log\left(L_{01}\left(\log(1+\xi_0)+\frac{it}{\lambda}+t_0,\xi_0\right)\right)+\lambda^2 B\left(\xi_0,\frac{t}{\lambda}\right)\right\}.$$

Atskiru atveju, $P_{01}(u,t_0,\xi_0)=1$, o $\deg P_{j1}(u,t_0,\xi_0)\geqslant 3j$.

Įrodymą baigiame pasinaudodami tapatybe

$$\int_0^\infty t^l\exp\left\{-at^2\right\}dt=\frac{1}{2a^{\frac{l+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right),\quad a>0.$$

Literatūra

[1] J. Knopfmacher, Analytic arithmetic of algebraic function fields, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, **50** (1979).

[2] E. Manstavičius, Didieji nuokrypiai lokaliojoje teoremoje multiplikatyviosioms funkcijoms, *Lithuanian J. Math.*, **14**(2), 181–182 (in Russian).

[3] R. Skrabutėnas, On the distributions of values of multiplicative functions, *Lithuanian J. Math.*, **18**(3), 139–148 (1978) (in Russian).

[4] E. Manstavičius, R. Skrabutėnas, Summation of the values of multiplicative functions on semigroups, *Lithuanian J. Math.*, **33**(3), 330–340 (1993) (in Russian).

[5] R. Skrabutėnas, Local distributions of arithmetic functions on semigroups, in: *New Trends in Probab. and Stat.*, vol. 4, TEV, Vilnius, & VSP, Utrecht, Tokyo (1997), pp. 363–370.

[6] R. Skrabutėnas, Local limit theorems for multiplicative functions on semigroups, Local limit theorems for multiplicative functions on semigroups, *Lietuvos matematikų draugijos darbai*, II t., Vilnius (1998), pp. 61–68.

[7] R. Skrabutėnas, Lokalieji multiplikatyviųjų funkcijų skirstiniai, *Lietuvos matematikų draugijos darbai*, III t., Vilnius (1999), pp. 86–92.

[8] R. Skrabutėnas, Ribinė didžiųjų nuokrypių lokalioji teorema multiplikatyviosioms funkcijoms, *Liet. Matem. Rink.*, **41**, spec.nr., 113–118 (2001).

Asymtotical expansions in local limit theorem of large deviations

R. Skrabutėnas

We continue investigation of the local distribution of multiplicative arithmetic functions from the class $M(G)$. In the present paper the local limit theorem of large deviations with asymptotical expansion of the principal term is obtained.