Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 141–146

Matematikos ir informatikos fakulteto mokslinio darbo finansavimo matematinis modelis

Dmitrij CELOV, Feliksas IVANAUSKAS, Aleksas Pikturna (VU)
el. paštas: feliksas.ivanauskas@maf.vu.lt

Įvadas

Šiame darbe nagrinėjamas optimalus lėšų, skirtų vienam universiteto fakultetui paskatai už atliktą mokslinę veiklą, paskirstymas. Darbo tikslas yra katedrų mokslinio darbo efektyvumo įvertinimas. Darbe pasinaudota VU MIF 2001 metų katedrų darbuotojų mokslinės veiklos duomenimis bei *Data envelopment analysis* (DEA) metodu [1, 2].

Darbas susideda iš keturių dalių. Pirmojoje dalyje aprašoma efektyvumo įvertinimui naudojama duomenų bazė. Antrojoje dalyje aprašomas finansų matematinio modelio sprendimo metodas. Trečiojoje dalyje analizuojami efektyvumo įvertinimo rezultatai. Paskutinėje dalyje pateikiamos išvados.

1. MIF mokslinio darbo finansavimo matematinis modelis

Nepaisant to, kad mokslininkų darbas yra susietas su daugeliu faktorių, yra pripažinta, jog svarbiausia mokslinių tyrimų dalis yra mokslinės publikacijos, atitinkančios „*A. Mokslinis darbas*“ (toliau A) daliai. Be to į A įeina balai už vadovėlius, monografijas, vertimus, metodinius leidinius. Didindami objektyvumą, be A dalies nagrinėsime „*E. Pranešimai konferencijose ir mokslo populiarinimas*“ (toliau E).

Tarkime, turime n atliekančių mokslinį darbą katedrų. Kiekvienai katedrai yra priskiriamas *potencialas* – dydis, apibrėžiantis katedros padėtį fakulteto vidurkio atžvilgiu ir skaičiuojamas pagal formulę:

$$P_K = NP_K \cdot EP + ND_K \cdot ED + NA_K \cdot EA + NM_K \cdot EM, \tag{1}$$

čia katedroje dirbančių profesorių etatų skaičius yra NP_K, docentų etatų – ND_K, asistentų etatų – NA_K, mokslininkų etatų – NM_K ($K \in \{1, 2, \ldots, 9\}$), EP, ED, EA, EM – atitinkami vidutinio produktyvumo lygiai.

Kitas įtakojantis įvesčių parametras yra katedros darbuotojų atlyginimas, kurio ekvivalentas yra atlyginimo koeficientai: $PKa = 20,35$; $DKa = 14,30$; $AKa = 8,25$; $MKa = 6,9$. O bendras pinigų kiekis, reikalingas atlyginimams kiekvienai katedrai, nustatomas šitaip:

$$DU_K = NP_K \cdot PKa + ND_K \cdot DKa + NA_K \cdot AKa + NM_K \cdot MKa. \tag{2}$$

1 lentelė
Įvesties ir išvesties parametrų reikšmės

Nr.	Katedros kodas	DU_K	A dalies P_K	A dalis (A_K)	E dalies P_K	E dalis (E_K)
1	110200	0,5295	0,7866	0,4107	0,6717	0,6103
2	110300	0,6103	0,4938	0,2811	0,5144	0,5062
3	110400	0,8922	0,8693	0,4143	0,8689	0,1102
4	110500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	110600	0,6502	0,6995	0,6563	0,6351	0,2242
6	110700	0,4830	0,4193	0,1968	0,5123	0,0711
7	110800	0,2990	0,1956	0,2290	0,2436	0,1957
8	110900	0,3801	0,2651	0,2154	0,3547	0,2093
9	111000	0,5135	0,6233	0,5164	0,5453	0,7468

1 lentelėje nurodytos pagrindinės katedrų įvesties-išvesties parametrų reikšmės.

K-ajai katedrai mokslui vykdyti skiriama LM_K lėšų. Visi skaičiavimai paremti prielaida, kad pedagoginis personalas vidutiniškai 30% savo laiko skiria moksliniam darbui, o mokslininkas – visą. Jeigu LMF yra visos fakultetui paskatai už atliktą mokslinį darbą skirtos lėšos, tai:

$$LMF = \sum_{K=1}^{9} LM_K = pdk \cdot \sum_{K=1}^{9} \frac{DU_K}{\theta_{BCC}^K} \Rightarrow pdk = \frac{LMF}{\sum_{K=1}^{9} \frac{DU_K}{\theta_{BCC}^K}}, \tag{3}$$

čia $1/\theta_{BCC}^K$ yra BCC modelio efektyvumo įvertinimas, o pdk – normavimo koeficientas.

Kadangi visi dydžiai, išskyrus θ_{BCC}^K, yra tiksliai apibrėžti, tai pagrindinis matematinis uždavinys bus efektyvumo įvertinimų θ_{BCC}^K nustatymas.

2. Finansų matematinio modelio sprendimo metodas

Katedros arba abstraktaus Tyrinėjamo Objekto (TO) efektyvumas yra apskaičiuojamas visų kitų katedrų (TO-ų) atžvilgiu, turint omenyje, kad visos katedros yra ant arba žemiau efektyvumo aibės krašto. Matematinio programavimo uždavinio formulavimas suteikia galimybę nustatyti katedrai tinkamiausius įvesties bei išvesties svorius.

Tarkime, kiekvienam TO-ui yra suteiktas indeksas $j = 1, 2, \ldots, n$. Be to, kiekvienas TO-as yra apibrėžtas m skirtingų įvesčių ($i = 1, 2, \ldots, m$), aprašytų vektoriumi $\bar{x}_j$, reikalingų s skirtingų išvesčių ($r = 1, 2, \ldots, s$), aprašytų vektoriumi $\bar{y}_j$, skaičiavimui. Kitaip sakant, TO_j suvartoja i-ojo įvesties x_{ij} kiekį r-ojo išvesties y_{rj} gamybai. Tarkime, kad $x_{ij} \geqslant 0$ bei $y_{ry} \geqslant 0$ ir, be to, kiekvienas TO-as turi mažiausiai vieną griežtai teigiamą įvesties arba išvesties reikšmę. DEA operuoja su $\bar{x}_j$ ir $\bar{y}_j$ vektorių koordinatėmis kaip su fiksuotomis konstantomis. Surandamos įvesčių ir išvesčių svorių reikšmės tam tikram „palyginimo" TO_0-ui, sprendžiant sekantį optimizavimo uždavinį:

$$\max_{\bar{u},\bar{v}} h_0(\bar{u},\bar{v}) = \max_{\bar{u},\bar{v}} \frac{\sum\limits_{r=1}^{s} y_{r0}u_r}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_{i0}v_i} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{r=1}^{s} y_{rj}u_r}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}v_i} \leqslant 1, & (j = 1,2,\ldots,n), \\ u_r \geqslant 0, \quad v_i \geqslant 0, & (r = 1,2,\ldots,s), \quad (i = 1,2,\ldots,m). \end{cases}$$

Čia u_r yra išvesties r svoris, o v_i – įvesties i svoris.

Mūsų pagrindinis tikslas yra mokslinio darbo efektyvumo įvertinimas, imant įvestis kaip duotas konstantas, todėl mes pasinaudosime alternatyviuoju DEA modeliu, dar vadinamu *išvesčių-orientuotu CCR modeliu*, [2]. Jo tikslas yra nustatyti maksimalų judėjimą per proporcingą išvesčių didinimą, esant fiksuotiems įvesčių reikšmėms. Jeigu (4) uždavinyje atliksime kintamųjų pakeitimus bei pakeisime neneigiamus svorių apribojimus į $v_i \geqslant \varepsilon$, $\mu_r \geqslant \varepsilon$, čia ε yra be galo maža konstanta, tada atitinkamas dualus tiesinio programavimo uždavinys bus:

$$\max_{\varphi,\bar{s}^-,\bar{s}^+,\bar{\lambda}} g_0(\varphi,\bar{s}^-,\bar{s}^+) = \max_{\varphi,\bar{s}^-,\bar{s}^+,\bar{\lambda}} \left\{ \varphi + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} \bar{s}_i^- + \sum_{r=1}^{s} \bar{s}_r^+ \right) \right\} \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} \varphi y_{r0} - \sum\limits_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + s_r^+ = 0, & (r = 1,2,\ldots,s), & (5.2) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^- = x_{i0}, & (i = 1,2,\ldots,m), & (5.3) \\ s_r^+ \geqslant 0, & (r = 1,2,\ldots,s), & \\ s_i^- \geqslant 0, & (i = 1,2,\ldots,m), & (5.4) \\ \lambda_{\cdot j} \geqslant 0, & (j = 1,2,\ldots,n). & \end{cases}$$

Čia λ_j yra TO-ų svoriai, s_r^+ yra išvesties papildomas neneigiamas dydis (slack, rezervas), o s_i^- – įvesties papildomas neneigiamas dydis. Taigi mūsų pagrindinis tikslas yra reikšmių λ_j radimas palyginamojo objekto su išvestimi $\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j$ ir įvestimi $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j$ konstravimui.

Teiginys. *TO_0-as bus efektyvus tada ir tik tada, kai bus patenkintos dvi sąlygos:*

1. $\varphi_0^0 = 1$;
2. $s_i^0 = s_r^0 = 0$ *kiekvienam i ir r.*

Kintamasis $\varphi_0^0 - 1$ parodo būtiną proporcingą visų TO_0-o išvesčių reikšmių padidinimą.

Apribojimas (5.2) parodo, kad net po visų išvesčių proporcingo padidinimo TO_0-o išvesčiai negali būti didesni už palyginamojo objekto išvestis. Panašiai iš (5.3) nesunku pastebėti, jog TO_0-o įvesčiai negali būti mažesni už palyginamojo objekto įvestis.

Iki šiol mes aptarėme tik tuos modelius, kurių pagrindinė prielaida yra veiklos *pastovios grąžos* prielaida (constant returns-to-scale, CRS). Geometriškai suprantame CRS kaip aibę visų pagalbinių efektyvumo hiperplokštumų, einančių per koordinačių pradžią. CCR modelio plėtinys leidžia išnagrinėti atvejus, kuriuose įvesčių parametrų padidėjimas sąlygoja didesnius (arba mažesnius) negu proporcingi padidėjimus išvestyse efektyvumo paviršiuje ir atskiria juos nuo išvesčių padidėjimų, atsiradusių dėl techninio neefektyvumo pašalinimo.

Matematinis Banker–Charnes–Cooper [1] DEA modelio formulavimas, esant *kintamos grąžos* prielaidai, skiriasi nuo CCR modelio papildoma iškilumo sąlyga $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. BCC modelis priskiria nagrinėjamų TO-ų iškilam apvalkalui produktyvumo tikimybinę aibę. BCC modelio atveju rezultatas vadinamas *lokaliuoju grynuoju techninių efektyvumu* (PTE). Esant CRS prielaidai turime, kad radialinis visų nagrinėjamų TO-ų didėjimas ir mažėjimas bei neneigiami (nebūtinai iškilieji) apvalkalai yra leidžiami, todėl CCR rezultatas dar vadinamas *globaliuoju techniniu efektyvumu* (TE). Pastebėsime, kad CCR ir BCC rezultatų palyginimas duoda galimybę įžvelgti TO-ų galimo neefektyvumo priežastis.

Tarkime θ^0_{CCR} bei θ^0_{BCC} apibrėžia atitinkamai CCR ir BCC modelių TO-ų rezultatus, tada masto efektas (SE) apibrėžiamas taip:

$$SE = \frac{\theta^0_{CCR}}{\theta^0_{BCC}} = \frac{TE}{PTE} \Rightarrow TE = PTE \cdot SE. \tag{6}$$

Tarsime, kad pilnasis TO-o neefektyvumas priklauso nuo neefektyvios operacijos (PTE) arba masto efekto (SE) arba nuo abiejų iš karto.

3. Modeliavimas ir jo rezultatai

Nagrinėsime trijų įvesčių $\{DU, P_A, P_E\}$, dvejų išvesčių {A, E} CCR ((5) uždavinys) ir BCC ((5) uždavinys su papildomu apribojimu $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$) modelių grupę. Tiesinio programavimo CCR bei BCC uždaviniai yra išspręsti simplekso metodu. 2 lentelė iliustruoja rezultatus.

CCR modelio rezultatai parodo, jog efektyviai operuoja keturios katedros (110500, 110600, 110800 bei 111000). Atkreipsime dėmesį ir į tai, kad visą eilė katedrų dirba gana gerai ir galėtų padidinti savo mokslinės produkcijos kiekį apytiksliai nuo 16% iki 34%. Tuo tarpu 110700 ir 110400 katedros pasirodė silpniau, joms reikėtų daugiau negu dvigubai didinti mokslinių tyrimų kiekį ir kokybę. Išplaukia aiški diferenciacija į efektyviai, vidutinio efektyvumo bei silpnai dirbančių katedrų grupes. Teigiami 110200, 110300, 110900 katedrų potencialų rezervai parodo, jog egzistuoja galimybė pagerinti mokslinės produkcijos išvestį.

2 lentelė
CCR ir BCC modelių rezultatai ir lėšų paskirstymas

Nr.	Katedros kodas	CCR	Įvertinimai	BCC	Įvertinimai	SE	LM_K
1	110200	1,261788	$l_9 = 1,031$	1,237305	$l_4 = 0,03$; $l_9 = 0,97$	1,0198	30 562,38 Lt
2	110300	1,168789	$l_9 = 0,3613$	1,145667	$l_7 = 0,3$; $l_9 = 0,7$	1,0202	39 049,69 Lt
3	110400	2,098600	$l_4 = 0,6153$; $l_7 = 0,3482$; $l_5 = 0,2657$	2,282883	$l_4 = 0,78$; $l_7 = 0,12$; $l_5 = 0,1$	1,0003	30 375,30 Lt
4	110500	1,000000	$l_4 = 1$	1,000000	$l_4 = 1$	1,0000	71 423,14 Lt
5	110600	1,000000	$l_5 = 1$	1,000000	$l_5 = 1$	1,0000	46 437,16 Lt
6	110700	2,235143	$l_4 = 0,2988$; $l_7 = 0,6161$;	2,217892	$l_7 = 0,68$; $l_4 = 0,2$; $l_5 = 0,12$	1,0078	15 554,51 Lt
7	110800	1,000000	$l_7 = 1$	1,000000	$l_7 = 1$	1,0000	21 358,47 Lt
8	110900	1,331973	$l_9 = 0,11$; $l_7 = 1,005$;	1,320670	$l_4 = 0,04$; $l_7 = 0,87$; $l_9 = 0,09$	1,0086	20 554,19 Lt
9	111000	1,000000	$l_9 = 1$	1,000000	$l_9 = 1$	1,0000	36 677,04 Lt

Katedros, efektyvios CCR modelyje, taip pat yra efektyvios ir BCC modelyje, ir jos turi produktyviausius pastovios grąžos atvejus – CRS. Nedidelis 110400 (arba 110700) katedros efektyvumas yra visų pirmą neefektyvaus darbo pasekmė, o masto efektas turi mažesnę įtaką šitų dviejų katedrų efektyvumui. Dėl $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^0 < 1$ CCR (Banker Thrall teorema [4]) modelyje, 110300 katedrai galioja didėjančios grąžos dėsnis. Kitaip sakant, jos turi galimybę pagerinti efektyvumo rezultatus proporcingai didindami mokslinės veiklos parametrus. Likusios neefektyviai dirbančios katedros, kurioms CCR modelyje $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^0 > 1$ ir kurioms galiojo mažėjančios grąžos atvejis, turi mažinti įeinamuosius parametrus.

Optimalios BCC modelio λ_j reikšmės nustato katedrų, priklausančių efektyvumo aibės kraštui, artimiausią kiekvienai katedrai tiesinį darinį.

Pagaliau, remiantis 2 skyrelio (3) formule gavome, kad kiekvienai katedrai paskatos už mokslinius tyrimus lėšos bus paskirtos būdu, nurodytu 2 lentelėje stulpelyje LM_K.

4. Išvados

1. Rezultatų analizė parodo, kad egzistuoja rezervai katedrų moksliniam darbui pagerinti. Atsižvelgiant į grąžos monotoniškumą, mažėjančios grąžos atveju turime mažinti įvesties parametrų reikšmes arba didinti išvestį, didėjančios – didinti ir įvesčių parametrus ir išvestį.
2. Reikia atsargiai prieiti prie duomenų pasirinkimo. Be abejonės, turi būti atsižvelgta į įvesties bei išvesties parametrų tarpusavio koreliaciją, nes, skirtingai nuo ekono-

metrinių metodų, DEA reikalauja priklausomybės tarp parametrų. Šitos taisyklės nepaisymas veda prie efektyviai dirbančių katedrų aibės pagausėjimo.

3. Sudėtingiausias adekvatus modelis, kurį pavyko sukonstruoti, yra su trimis $\{DU, P_A, P_E\}$ įvestimis bei dviem $\{A, E\}$ išvestimis. Kadangi kintamos grąžos modelis (BCC) leidžia pašalinti nepageidautinas paklaidas bei ištirti masto efektą, tai pagrindini rezultatai yra būtent šito modelio θ^K_{BCC} reikšmės.
4. Skirtingai nuo egzistuojančios metodikos, kai personalo produktyvumo koeficientus nustato ekspertų komisija, nagrinėjamas skatinimo modelis, paremtas efektyvumo matavimu. Šis darbas parodė, kad problema gali būti išspręsta matematiniais metodais, tačiau modelis dar galėtų būti patobulintas.

Literatūra

[1] R.D. Banker, A. Charnes, W.W. Cooper, Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, *Management Science*, **30**, 1078–1092 (1984).

[2] A. Charnes, W.W. Cooper, E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, **2**, 429–444 (1978).

[3] P. Korhonen, R. Tainio, J. Wallenius, *Value Efficiency Analysis of Academic Research*, IIASA, Interim report IR-98-032/June.

[4] M.G. Kocher, M. Luptacik, M. Sutter, *Measuring Productivity of Research in Economics. A Cross-Country Study Using DEA*, Working Paper No. 77, August (2001).

The mathematical model of the distribution of the research funds of the Faculty of Mathematics and Informatics

D. Celov, F. Ivanauskas, A. Pikturna

We evaluate the efficiency of research outputs of departments for proper distribution of research funds using a sample of MIF VU Departments' dataset of research and publications. The tool is *Data envelopment analysis* (DEA). Research outputs, measured by points, are taken as output data. Inputs are measured by potentials of department's personal and their salaries. The results of DEA analysis shows that some of the departments operates under increasing return-to-scale that allows to increase overall efficiency of the departments by using additional slacks.