Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 165–168

Vienos klasės diferencialinių lygčių sistemos sprendinių stabilumas

Petras GOLOKVOSČIUS (VU)

Nagrinėjame n lygčių sistemą, užrašytą vektorine lygtimi

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \Lambda\vec{x} + \vec{g}(t, \vec{x}^{\,T}); \tag{1}$$

čia $\vec{x} = colon(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – nežinomas vektorius, $\vec{x}^{\,T}$ – transponuotas vektorius, Λ – Žordano kanoninė pastovi matrica, netiesinis narys

$$\vec{g}(t, \vec{x}^{\,T}) = colon\big(g_1(t, \vec{x}^{\,T}), \ldots, g_n(t, \vec{x}^{\,T})\big)$$

tenkina nelygybę

$$\|\vec{g}(t, \vec{x}^{\,T})\| \leqslant \varphi(t)\|\vec{x}(t)\|, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0, \tag{2}$$

o skaliarinės funkcijos $\varphi(t)$ integralas intervalu $[t_0, +\infty)$ yra teigiamas dydis, t.y.,

$$\int_{t_0}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t = K < +\infty. \tag{3}$$

Taškas $\vec{x} \equiv \vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ yra (1) lygčių sistemos pusiausvyros (ramybės) taškas.

Tarsime, (1) lygčių sistemos bet kurio Koši uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties sritis yra

$$D = \big\{t \geqslant t_0 \geqslant 0,\ \|\vec{x}\| \leqslant h\big\},$$

o vektorių $\vec{g}(t, \vec{x}^{\,T})$ ir $\vec{x}$ normą apibrėžiame šitaip:

$$\|\vec{g}(t, \vec{x}^{\,T})\| = \sum_{\nu=1}^{n} \big|g_\nu(t, \vec{x}^{\,T})\big|, \quad \|\vec{x}\| = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|.$$

Tiesioginiu arba pirmuoju Liapunovo metodu įrodome šias dvi teoremas.

1 teorema. *Tegu* (1) *lygčių sistemą atitinkančios linearizuotos sistemos*

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = \Lambda\vec{y} \tag{4}$$

visi sprendiniai, kai $t \to +\infty$, yra stabilūs pagal Liapunovą. Tada ir (1) lygčių sistemos trivialusis sprendinys $\vec{x} \equiv \vec{0}$, kai $t \to +\infty$, yra stabilus pagal Liapunovą.

Įrodymas. Žinome ([1], p.86), kad (4) lygčių sistemos, kurios koeficientų matrica Λ pastovi, taške $t = t_0$ normuota fundamentalioji matrica yra

$$Y(t) = \mathrm{e}^{\Lambda(t-t_0)}, \quad Y(t_0) = E. \tag{5}$$

Spręsdami (1) lygčių sistemą Lagranžo metodu, gauname

$$\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{\Lambda(t-t_0)}\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\Lambda(t-\tau)}\vec{g}(\tau, \vec{x}^T(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{6}$$

Pagal 1 teoremos sąlygą (4) lygčių sistemos visi sprendiniai, kai $t \to +\infty$, yra stabilūs. Todėl jos (5) fundamentaliosios matricos norma yra aprėžta ([1], p.113), t.y.,

$$||\mathrm{e}^{\Lambda(t-t_0)}|| \leqslant k < +\infty, \quad ||\mathrm{e}^{\Lambda(t-\tau)}|| \leqslant k < +\infty, \quad t \geqslant t_0. \tag{7}$$

Be to, iš (6) integralinės lygties gauname

$$||\vec{x}(t)|| \leqslant ||\mathrm{e}^{\Lambda(t-t_0)}||\, ||\vec{x}(t_0)|| + \int_{t_0}^{t} ||\mathrm{e}^{\Lambda(t-\tau)}||\, ||\vec{g}(t, \vec{x}^T(\tau)||\mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

Iš čia, atsižvelgę į (2) ir (7) nelygybes, parašome

$$||\vec{x}(t)|| \leqslant k||\vec{x}(t_0)|| + k\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)||\vec{x}(\tau)||\mathrm{d}\tau, \quad t \geqslant t_0. \tag{9}$$

Pastarajai nelygybei pritaikome Belmano ir Gronvalio lemą ([2], p.46). Tada

$$||\vec{x}(t)|| \leqslant k||\vec{x}(t_0)||\mathrm{e}^{k\int_{t_0}^{+\infty} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau}, \quad t \geqslant t_0. \tag{10}$$

Kita vertus, remdamiesi (3) nelygybe, iš (10) įverčio gauname

$$||\vec{x}(t)|| \leqslant k||\vec{x}(t_0)||\mathrm{e}^{k\int_{t_0}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t} \leqslant ||\vec{x}(t_0)|| \cdot K_1 < +\infty;$$

čia pastovusis teigiamasis dydis

$$K_1 = k\exp(kK) < +\infty. \tag{11}$$

Reikalaujame, kad $\forall\varepsilon > 0$ būtų tenkinama nelygybė

$$||\vec{x}(t)|| \leqslant ||\vec{x}(t_0)||K_1 < \varepsilon \Rightarrow ||\vec{x}(t)|| < \varepsilon, \quad t \geqslant t_0.$$

Tada, imdami

$$||\vec{x}(t_0)|| < \frac{\varepsilon}{K_1} = \delta,$$

įsitikiname, kad tenkinamos stabilumo pagal Liapunovą sąlygos:

$$\text{kai } ||\vec{x}(t_0)|| < \delta, \text{ tai } ||\vec{x}(t)|| < \varepsilon, \quad t \geqslant t_0. \tag{12}$$

Tai įrodo (1) lygčių sistemos trivialaus sprendinio, kai $t \to +\infty$, stabilumą.

2 teorema. *Tarkime,* (4) *linearizuotos sistemos visi sprendiniai, kai* $t \to +\infty$, *yra asimptotiškai stabilūs. Tada ir* (1) *lygčių sistemos trivialusis sprendinys* $\vec{x} \equiv \vec{0}$, *kai* $t \to +\infty$, *yra asimptotiškai stabilus.*

Įrodymas. Pagal šios teoremos sąlygą (4) lygčių sistemos koeficientų matricos Λ charakteristinės lygties visų šaknų realiosios dalys yra neigiamos ([1], p.89). Pažymime

$$\alpha = \max_{\nu} \operatorname{Re} \lambda_\nu(\Lambda) < 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

ir pasirenkame $\varepsilon > 0$ tiek mažą, kad būtų teisinga nelygybė

$$\alpha + \varepsilon < 0.$$

Tada žinomas įvertis ([1], p.57)

$$||e^{\Lambda(t-t_0)}|| \leqslant ce^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0, \tag{14}$$

kuriame $c = c(\varepsilon)$ – teigiama konstanta. Atsižvelgę į (2) ir (14) formules, iš (8) nelygybės gauname

$$||\vec{x}(t)|| \leqslant ce^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)}||\vec{x}(t_0)|| + c\int_{t_0}^{t} e^{(\alpha+\varepsilon)(t-\tau)}\varphi(\tau)||\vec{x}(\tau)||\mathrm{d}\tau,$$

arba

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t}||\vec{x}(t)|| \leqslant ce^{-(\alpha+\varepsilon)t_0}||\vec{x}(t_0)|| + c\int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha+\varepsilon)\tau}\varphi(\tau)||\vec{x}(\tau)||\mathrm{d}\tau.$$

Iš čia, remdamiesi Belmano ir Gronvalio lema, parašome nelygybę

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t}||\vec{x}(t)|| \leqslant ce^{-(\alpha+\varepsilon)t_0}||\vec{x}(t_0)||e^{c\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau}, \quad t \geqslant t_0,$$

kurią padauginę iš $e^{(\alpha+\varepsilon)t}$ ir atsižvelgę į (3) integralą ir į pastovių teigiamų dydžių σ, K_1 žymėjimus

$$\sigma = -(\alpha+\varepsilon) > 0, \quad K_1 = c_1 \exp(cK) > 0,$$

gauname

$$||\vec{x}(t)|| \leqslant e^{-\sigma(t-t_0)}||\vec{x}(t_0)||K_1, \quad t \geqslant t_0. \tag{15}$$

Remdamiesi (15) įverčiu, reikalaujame, kad esant $\forall\varepsilon > 0$ būtų

$$||\vec{x}(t)|| \leqslant e^{-\sigma(t-t_0)}||\vec{x}(t_0)||K_1 < \varepsilon, \quad t \geqslant t_0.$$

Tada

$$||\vec{x}(t_0)|| < \frac{\varepsilon}{K_1 e^{\sigma(t-t_0)}} \leqslant \frac{\varepsilon}{K_1} = \delta, \quad t \geqslant t_0.$$

Taigi, kai $||\vec{x}(t_0)|| < \delta$, tai $||\vec{x}(t)|| < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$.

Be to, iš (15) nelygybės, kurioje $\sigma > 0$, išplaukia $\lim_{t\to+\infty} ||\vec{x}(t)|| = 0$. Todėl, kai $t \to +\infty$, (1) lygčių sistemos trivialusis sprendinys yra asimptotiškai stabilus.

Pavyzdys. Sakykime, (1) lygčių sistemoje

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} e^{-t}\sin x_2 \\ e^{-t}\sin x_1 \end{bmatrix}.$$

Kadangi $|\sin x_\nu| \leqslant |x_\nu| \quad (\nu = 1,2)$, tai

$$||\vec{g}|| \leqslant e^{-t}(|x_1| + |x_2|) = e^{-t}||\vec{x}||.$$

Be to, $\varphi(t) = e^{-t}$, $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1 = K$, $||\vec{g}|| \leqslant ||\vec{x}||$, $t \geqslant 0$.

Sakykime, pavyzdžiui, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Tada pagal 1 teoremą trivialusis sprendinys yra stabilus, kai $t \to +\infty$.

Tarkime, $\operatorname{Re}\lambda_\nu < 0$ $(\nu = 1,2)$. Tada pagal 2 teoremą jis yra asimptotiškai stabilus, kai $t \to +\infty$.

Literatūra

[1] Б.П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, Москва (1967).

[2] Р. Беллман, *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, ИИЛ, Москва (1954).

The asymptotic stability for a system of nonlinear PDEs

P. Golokvosčius

The asymptotic stability of a system of nonlinear PDEs is proved.