Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 277–282

Diskretinių resursų paskirstymo uždaviniai ir jų taikymas karyboje

Vytautas TIEŠIS (MII, VPU)
el. paštas: paštas: tiesis@ktl.mii.lt

1. Įvadas

Turimų resursų kiekis visada ribotas. Nuo to, kaip mes juos paskirstysime, priklauso ir kokį bendrą pelną ar nuostolį turėsime. Karinių veiksmų valdyme resursų paskirstymas yra dalinis uždavinys, sprendžiamas tiek automatiškai, tiek automatizuotai, tiek vien žmonių, priklausomai nuo turimos informacijos bei būtino sprendimo greičio. Mūšio valdymas aktualizuoja apytikslius, bet labai greitus gynybinių resursų paskirstymo uždavinių sprendimo metodus, ypač priešraketinės gynybos atveju, kur taikinių aptikimo bei priskyrimo naikinimo priemonėms procedūros vis labiau automatizuojamos. Keliami uždaviniai taip paskirstyti turimus resursus, pavyzdžiui, priskirti ginklus taikiniams, kad būtų minimizuoti galimi savi nuostoliai ar maksimizuoti priešo nuostoliai. Šiam uždaviniui taikomi įvairūs matematiniai modeliai, tame tarpe jis dažnai formuluojamas kaip specialus matematinio programavimo uždavinio atvejis, tai yra kaip nuostolių minimizavimo ar ekvivalentus pelno maksimizavimo uždavinys, kai ribojamas resursų kiekis, ir yra spręstas įvairiais dinaminio bei matematinio programavimo metodais [1–6].

Šiame straipsnyje pateikiama diskretinių resursų paskirstymo uždavinių klasė, pratęsiant ankstesnius autoriaus ir kolegų darbus [3, 4], formuluojami kariniai modeliai, konkretizuojantys resursų paskirstymo uždavinius įvairioms situacijoms, pateikiami greiti sprendimo algoritmai bei nagrinėjamos jų savybės. Tiek modeliai, tiek algoritmai yra apytiksliai ir tai yra natūralu, nes ir duomenys šioje taikomojoje srityje būna apytiksliai. Sukurti algoritmai priklauso diskretinių gradientinių algoritmų klasei [7], [8] ir yra žinomų algoritmų išvystymas, panaudojant specifines tikslo funkcijos ar ribojimų savybes, būdingas kariniams taikymams.

2. Uždavinio formulavimas

Aprašykime diskretinių nevienarūšių resursų paskirstymo uždavinius su netiesinėmis tikslo funkcijomis, kur resursus galima interpretuoti kaip gynybos ar puolimo priemonių vienetus, o vartotojus kaip taikinius. Tarkim, kad turime m rūšių diskretinių resursų, kiekvienos rūšies po b_i vienetų. Tuos resursus reikia paskirstyti tarp n vartotojų, paskirstymą aprašo matrica $x = [x_{ij}]$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, kur $x_{ij} \in \{0, 1, \ldots, b_i\}$ yra i-tos rūšies resursų kiekis, paskirtas j-tajam vartotojui. Visi j-tajam vartotojui paskirti resursai aprašomi vektoriumi $x_j = (x_{ij},\ i = \overline{1,m})$ ir tarkim, kad tuo atveju j-tasis vartotojas padaro $\varphi_j(x_J)$ nuostolių. Bendri nuostoliai $F(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j)$ yra $n \times m$ sveikaskaitinių kintamųjų reali funkcija $F(x) : I^{n\times m} \to R$, adityvi kintamųjų grupių $x_j,\ j = \overline{1,n}$ atžvilgiu. Turime minimalių nuostolių paieškos uždavinį:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j) \to \min_{x\in D}. \tag{1}$$

Kintamųjų x_{ij} sritis D apibrėžiama sekančiai:

$$x_{ij} \in \{0, 1, \ldots, b_i\}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant b_i, \quad i = \overline{1,m},\ b_i > 0. \tag{3}$$

Uždavinys (1)–(3) yra aktualus praktikoje ir bendru atveju, taip pat ir dažnu specialiu atveju, yra sudėtingas, nesprendžiamas per polinominį laiką. Todėl jis domino bei tebedomina mokslinę visuomenę ir yra spręstas įvairiais metodais, pradedant klasikiniu dinaminiu programavimu [9] ir baigiant gradientiniais algoritmais specialiems atvejams [7, 8].

Nagrinėsime tokias tikslo funkcijas, kurių diskretinis dešinysis gradientas [7] $\nabla_{ij}^{+}F(x) = F(x) - F(x + e_{ij}) = \varphi_j(x_j) - \varphi_j(x_j + e_i) = \nabla_i\varphi_j(x_j)$ yra nedidėjanti funkcija. Čia vektorius e_{ij} turi ij-tąją vienetinę koordinatę, atitinkamai e_i—i-tąją, kitos koordinatės nulinės. Tokios funkcijos vadinamos koordinatiškai iškiliomis. Tai yra, papildomų resursų vienetų paskyrimas vartotojui duoda vis mažesnį nuostolių sumažėjimą. Šis funkcijų klasės ribojimas yra įprastas nuostolių funkcijoms ir galioja toliau nagrinėjamiems modeliams.

Ribodami sritį D papildomais ribojimais, galime modeliuoti įvairias mūšio situacijas ir priartinti supaprastintą modelį (1)–(3) prie realybės.

Ribojimai (2) ir (3) neriboja visiško gynybos priemonių sunaudojimo, todėl modelis (1)–(3) taikytinas tik masinio puolimo atveju. Natūralu riboti resursų vienetų, skiriamų vienam taikiniui, skaičių:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant B_j, \quad j = \overline{1,n},\ B_j > 0. \tag{4}$$

Taip pat nagrinėsim atvejį, kai vienos rūšies visi resursai gali būti priskirti vienam vartotojų klasteriui, ir tas vartotojų suskaidymas į klasterius nebūtinai turi būti vienodas skirtingoms resursų rūšims. Tarkim, kad kiekvienam i vartotojų aibė $J = \{1, \ldots, n\}$ yra suskaidyta į klasterius $A_{ik} \subset J$, $k = \overline{1, K_i}$. Tada įvedamas papildomas ribojimas:

$$x_{ij}x_{is} = 0 \quad \forall j,\ s\colon\ j \in A_{il},\ s \in A_{ik},\ l \neq k. \tag{5}$$

Aprašysime nuostolių funkcijų modelius. Tarkim, kad yra žinoma j-tojo taikinio sunaikinimo tikimybė a_{ij} $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ su i-tos rūšies gynybos priemonės vienetu, o taip pat yra žinomas subjektyvus j-tojo taikinio svoris, kitaip tariant, galimas nuostolis G_j $(j = \overline{1,n})$, kurį gali sukelti j-tasis taikinys. Laikome, kad taikinio išlikimo faktai po kiekvienos priemonės vieneto panaudojimo yra nepriklausomi įvykiai. Dėka nepriklausomumo j-tojo taikinio išlikimo tikimybė, panaudojus turimus gynybos resursus, yra $\prod_{i=1}^{m}(1-a_{ij})^{x_{ij}}$, o vidutiniai galimi nuostoliai $\varphi_j(x_j)$ dėl j-tojo taikinio yra

$$\varphi_j(x_j) = G_j \prod_{i=1}^{m} (1 - a_{ij})^{x_{ij}}. \tag{6}$$

Kitu modeliu įvertinsime neapibrėžtumą atpažįstant taikinius. Tarkim, kad turime z tipų taikinius. Matrica $P = [P_{th}], t, h = \overline{1,z}$ aprašomas neapibrėžtumas juos atpažįstant, kur P_{th} yra tikimybė, kad taikinys, atpažintas kaip esantis t tipo, yra h tipo. Tada, skaičiuodami panašiai kaip pirmajame modelyje ir taikydami pilnosios tikimybės formulę, gauname vidutinius galimus nuostolius dėl j-tojo taikinio

$$\varphi_j(x_j) = \sum_{h=1}^{z} W_h P_{t_j h} \prod_{i=1}^{m} (1 - a_{ih})^{x_{ij}}, \tag{7}$$

čia W_h yra h-tojo tipo taikinio svoris, o vektorius $(t_j,\ j = \overline{1,n})$ nusako kaip buvo atpažinti taikiniai. Nesunku įsitikinti, kad abiejų modelių (6) ir (7) nuostolių funkcijos yra koordinatiškai iškilios.

3. Sprendimo algoritmai

Panašiems uždaviniams spręsti sėkmingai naudojami diskretiniai gradientiniai (greedy) metodai [7, 8]. Metodo esmė yra ta, kad vieno žingsnio metu vienetu padidinama koordinatė, duodanti didžiausią nuostolių funkcijos sumažėjimą. Konkretizuokime metodą uždaviniui (1)–(4). Algoritmą vadinsime *Nuoseklaus skirstymo algoritmu.*

Pradedame nuo $x^0 = 0$, $\beta^0 = (b_1, \dots, b_m)$, $\xi^o = (B_1, \dots, B_n)$.

Kiekviename s-jame žingsnyje randame optimalų paskyrimą:

$$(l,k) = \arg \max_{(ij):\beta_i^s>0,\xi_j^s>0} \{\nabla_i \varphi_j(x_j^s)\}, \tag{8}$$

$$x^{s+1} = x^s + e_{lk}, \qquad \beta^{s+1} = \beta^s - e_l, \qquad \xi^{s+1} = \xi^s - e_k.$$

Skaičiavimus tęsiame, kol yra ką ar kam paskirti, tai yra kol taps $\beta^{s+1} = 0$, arba $\xi^{s+1} = 0$, arba $\nabla_l \varphi_k(x_k^s) = 0$. Tada x^{s+1} laikysime uždavinio (1)–(4) sprendinio aproksimacija ir žymėsime x^g .

Aptarsime algoritmo ir sprendinio savybes.

Algoritmas greitaeigis. Pažymėkim $M = \sum_i b_i$. Ilgiausiai resursų skirstymas truks, jei bus paskirstyti visi M resursai ir jei skirstomų resursų rūšių skaičius mažės, tai yra β^s

koordinatės taps nulinėmis, tik paskutinėse $m-1$ iteracijose. Tada bus atlikta M iteracijų, kiekvienoje jų, išskyrus paskutines $m-1$, skirtumas $\nabla_i\varphi_j(x_j^s)$ bus paskaičiuotas ir sulygintas $m \times n$ kartų. Viso bus atlikta operacijų $Nop = O(n[Mm-(m-1)m/2])$, tai yra operacijų skaičius auga polinomiškai, augant uždavinio apimčiai. Kadangi s-tojoj iteracijoj priskyrus resurso vienetą k-tajam taikiniui pakinta tik skirtumai $\nabla_i\varphi_k(x_k^{s+1})$, $i=\overline{1,m}$, tai tikslinga skirtumų matricą laikyti atmintyje ir kiekvienoj iteracijoj perskaičiuoti tik pakitusį stulpelį. Šiuo atveju skirtumų skaičiavimų skaičius sumažėja iki $Nop = O(m[n+M-1-(m-1)/2])$.

Daliniams uždavinio (1)–(4) atvejams eilė autorių įrodė, kad nuoseklaus skirstymo algoritmo sprendinys x^g yra globalus optimumas. Tam tikrais aspektais bendresnio uždavinio sprendinio optimalumą įrodė Kovaliovas [10], remdamasis tikslo funkcijos separabilumu ir koordinatiniu iškilumu. Mūsų atvejui jo rezultatas formuluojamas sekančiai:

1 teiginys. Jei $m=1$ ir funkcijos $\varphi_j(x_j)$ yra koordinatiškai iškilios, tai x^g yra uždavinio (1)–(4) optimalus sprendinys.

Ribojimams (5) nuoseklaus skirstymo algoritmas nėra tiesiogiai taikytinas, nes vienos rūšies resursų vienetai turi būti paskirti vienam taikinių klasteriui. Todėl kiekviename algoritmo žingsnyje tikslinga išrinkti klasterį, kuriame optimaliai paskirsčius vienos rūšies resurso vienetus gaunamas didžiausias nuostolių funkcijos sumažėjimas. Skirstymą neperspektyvių klasterių viduje sutrumpinsime pritaikydami šakų ir ribų metodą. Taigi algoritmas, kurį vadinsime *Nuoseklaus skirstymo klasteriams algoritmu*, bus sekantis:

Pradedame nuo $x^0, \beta^0 = (1,\dots,1)$, $\xi^o = (B_1,\dots,B_n)$ Kiekviename žingsnyje randame kurios nors rūšies resursų optimalų paskyrimą vienam vartotojų klasteriui:

$$(l,k) = \arg \max_{(ir):\ \beta_i^s>0,\ 1\leqslant r\leqslant K_i} \{F(x^s) - F(x^s + z^{sir}\},$$
$$x^{s+1} = x^s + z^{slk}, \qquad \beta^{s+1} = \beta^s - e_l, \qquad \xi_{lj}^{s+1} = \xi_{lj}^s - z_{lj}^{slk} j \in A_{lk};$$

čia z^{sir} yra optimumas dalinio uždavinio, paskirstant i rūšies resursus A_{ir} klasterio viduje nuoseklaus skirstymo algoritmu. Tai kad z^{sir} yra optimumas išplaukia iš 1 teiginio, nes skirstoma viena resurso rūšis ($m=1$).

Dalinis uždavinys formuluojamas sekančiai:

$$z^{sir} = \arg\min_{z\in D_{ir}} F(x^s + z),$$

čia

$$D_{ir} = \Big\{x : \sum_{j\in A_{ir}} x_{ij} \leqslant b_i;\ x_{lj} = 0,\ j \notin A_{ir} \vee l \neq i\Big\}. \tag{9}$$

Kartojame m žingsnių kol bus paskirstytos visos m resursų rūšių arba kol kiekvienam vartotojui bus skirta pakankamai resursų, tai yra kol taps $\xi^{s+1} = 0$.

Kiekviename žingsnyje tenka spręsti dalinį uždavinį (9) iki tiek kartų, kiek yra klasterių. Algoritmo imlumą skaičiavimams galime sumažinti kiekviename žingsnyje kontroliuodami kokiems vartotojams buvo paskirti resursai ankstesniame žingsnyje. Dėka $F(x)$

separabilumo vartotojų atžvilgiu turime $z^{(s+1)ir} = z^{sir}$, jei $A_{ir} \cap A_{lk} = \varnothing$, kur (lk) yra s-tojo žingsnio paskyrimas.

Įvertindami dalinių uždavinių optimumų $F(z^s_{ir})$ apatines ribas galime taikyti šakų ir ribų metodiką ir atmesti neperspektyvius klasterius. Spręsdami dalinį uždavinį (9) A_{ir} klasteriui, kiekviename nuoseklaus skirstymo algoritmo v-tame žingsnyje nuostolius sumažiname dydžiu $\nabla_i \varphi_j(x^v_j)$, gautu pagal (8) formulę. Trumpumo dėlei pažymėkime šį dydį ∇^v_{ir}. Iš koordinatinio iškilumo išplaukia, kad su kiekvienu v žingsniu skirtumas ∇^v_{ir} vis mažės. Todėl po dalinio uždavinio sprendimo v-tojo žingsnio turime įvertį $F(x^s + z^{sir}) \geqslant F(x^s) - \sum_{c=1}^{v} \nabla^c_{ir} - (b_i - v)\nabla^v_{ir} = \omega_{ir}$. Kiekviename nuoseklaus skirstymo klasteriams algoritmo žingsnyje nutraukiame dalinių uždavinių klasteriams A_{ir} sprendimą, jei turime perspektyvesnį klasterį A_{ik} , tai yra, jei pasiektas rekordas $F(x^s) - \sum_{c=1}^{v} \nabla^c_{ik} \leqslant \omega_{ir}$.

Akivaizdu, kad iš 1 teiginio išplaukia ir nuoseklaus skirstymo klasteriams algoritmu gauto sprendinio optimalumas homogeniškiems resursams, tai yra, kai $m = 1$. Algoritmo skaičiavimų apimtis auga polinomiškai, nes daroma ne daugiau m žingsnių, kuriuose ne daugiau $\sum_i K_i$ kartų sprendžiamas polinominio sudėtingumo dalinis uždavinys.

4. Eksperimentų rezultatai

Algoritmų efektyvumui pademonstruoti pateikiame uždavinio (1)–(3) su tikslo nuostolių funkcijom (7) skaitinių eksperimentų rezultatus. Spręsta 100 uždavinių su $n = z = 20$, $m = 3$, $b_i = 3$, $i = \overline{1,3}$ ir atsitiktinai generuotomis pataikymo bei atpažinimo tikimybėmis. Tikslumas matuotas santykinės paklaidos procentais $\Delta F = 100[F(x^g) - F(x^{op})]/[F_{\max} - F(x^{op})]$, čia $F_{\max}$ yra blogiausio paskirstymo nuostoliai, o $F(x^{op})$ yra optimalaus paskirstymo nuostoliai. 1 lentelėje pateiktas sprendinių skaičiaus N pasiskirstymas tikslumo intervalams.

5. Išvados

Pateikėme greitus gradientinius algoritmus nevienalyčiams diskretiniams resursams skirstyti, kai tikslo funkcijos yra netiesinės ir koordinatiškai iškilios. Parodėme, kad algoritmų sudėtingumas yra polinominis ir homogeniškiems resursams jie randa optimalų sprendinį. Pateiktos uždavinio konkretizacijos įvairiems gynybinių resursų skirstymo uždaviniams. Eksperimentai rodo, kad nehomogeniškiems resursams pasiūlyti algoritmai randa artimus optimumui sprendinius.

Lentelė 1

Sprendinių skaičiaus N pasiskirstymas tikslumo intervalams

N	30	28	21	14	6	1
ΔF	[0; 0,1)	[0,1; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)

Literatūra

[1] В.В. Дружинин, Д.С. Конторов, Вопросы военной системотехники, Воениздат, Москва (1961).
[2] С.З. Кузмин, *Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации*, Радио и связь, Москва (1986).
[3] В. Тешис, Градиентные алгоритмы распределения порционного ресурса, *Optimalių sprendimų teorija*, **14**, 139–159 (1990).
[4] В. Тешис, В. Шалтянис, Ф. Юшка, О задаче распределения порционного ресурса, *Optimalių sprendimų teorija*, **12**, 100–113 (1987).
[5] V. Šaltenis, V. Tiešis, Simulation and optimization of radar search strategies, *Informatica*, **3** (2), 256–274 (1992).
[6] P. Labbe, R. Proulx, Impact of systems and information quality on mission effectiveness, in *Proceedings of 5th International Command and Control Research and Technology Symposium*, Canberra ACT, Australia, Department of Defence, Command and Control Research Program (2000), `http://www.dodccrp.org/2000ICCRTS/cd/papers/Track6/064.pdf`.
[7] М.М. Ковалев, *Матроиды в дискретной оптимизации*, Издательство Университтетское, Минск (1987).
[8] E. Girlich, M.M. Kovalev, D.M. Vasilkov, Greedy sets and related problems, *European J. of Operational Research*, **101**, 74–80 (1997).
[9] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA (1957).
[10] М.М. Ковалев, Метод частичных порядков, *Докл АН БССР*, **24** (2), 113–116 (1980).

Discrete resource allocation problems and military applications

V. Tiešis

The paper deals with the discrete resource allocation problem and its application in the attack steering systems. The non-linear models of multiple target prioritisation are presented in the case of multiple different weapons. The fast greedy algorithms are presented and investigated. In the case of homogeneous resources (weapons) the algorithms give optimal solutions. The experiments show that the algorithms give sufficiently exact solutions in the case of different weapons.