Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 369–374

Eksperimentas kaip moksleivio matematinės tiriamosios veiklos metodas

Sigitas BALČIŪNAS (ŠU), Daiva FREIBERGAITĖ (Šiaulių S. Daukanto vid. m-la)
el. paštas: balciunas@cr.su.lt, daivosdezute@mail.lt

1. Įvadas

Klausimas apie jutiminio ir racionaliojo pažinimo santykį didaktiniu aspektu klasikinėje matematikos pedagogikoje yra sprendžiamas derinant matematikos, kaip logiškai išbaigtos aksiominės teorijos sampratą ir didaktikos principus. Ugdymą traktuojant kaip perdavimą ir perėmimą, didžiausias vaidmuo yra skiriamas žinių ir įgūdžių sistemos įsisąvinimui, o šiam tikslui realizuoti geriausiai tinka reprodukciniai metodai, perteikiantys matematiką kaip išbaigtą teoriją. Stebėjimo ir eksperimento, kaip empirinių pažinimo metodų paskirtis tuomet yra iliustruoti matematines objekto savybes ar pavirtinti, paneigti teiginio, kurį reikia išmokti, teisingumą [6].

Mokymosi paradigma, kuria remiasi dauguma šiuolaikinių didaktinių teorijų, **matematinį ugdymą traktuoja kaip tyrimą** [7]. Moksleivis tuomet yra tarsi **eksperimentatorius**, kuris bando, improvizuoja, schematizuoja, daro klaidas, jas taiso arba keičia naujomis klaidomis ir taip kuria matematines sąvokas, atranda ir tikrina matematinius teiginius, sudaro algoritmus. Taigi eksperimentas tampa ne vien faktų kaupimo įrankiu, bet ir galingu matematinės teorijos konstravimo instrumentu. Toks eksperimento vaidmuo neprieštarauja matematikos prigimčiai. Nors visuotinai pripažįstama, kad matematika nėra empirinis mokslas, empirinių metodų ir induktyvaus protavimo svarbą matematikoje pabrėžė žymiausi mokslininkai: B. Russell, H. Weyl, Gödel, K.F. Gauss, A. Puankare, L. Euler, J. Dieudonné ir kt. [10]. Mokytojui, kaip mokymosi aplinkos organizatoriui, tuomet tenka spręsti **empirinės ir dedukcinės matematinės veiklos aspektų suderinamumo problemą.** Įvairiose šalyse atlikti tyrimai (pavyzdžiui [1], [2], [8]) rodo, kad realiai mokykloje egzistuoja didžiulis atotrūkis tarp pragmatinių ir intelektualių matematikos pagrindimo metodų.

Viena iš šiuolaikinės pedagogikos nuostatų yra jautrumas ir dėmesingumas moksleivio jau įgytoms konstrukcijoms, todėl yra prasminga ugdant matematinio tyrimo metodologijos sampratą **pasinaudoti jau egzistuojančiomis, moksleiviui priimtinomis eksperimentinio tyrimo schemomis**. Tuo pagrindu, galima suformuluoti mokslinę problemą: kokie yra eksperimento, kaip tyrimo metodo raiškos moksleivio realioje matematinėje veikloje bruožai?

Tyrimo objektas yra eksperimento kaip mokslinio pažinimo metodo funkcionavimas mokyklinėje matematikoje.

Tyrimo tikslas – atskleisti eksperimento funkcijų įvairovę mokyklinio matematinio tyrimo struktūroje. Tai galėtų padėti ieškoti optimalių sąveikos su moksleiviu būdų, skatinančių matematinio tyrimo metodologijos sampratą.

Tyrimo metodai: veiksmo tyrimas (action research), vieno atvejo analizė. Metodinėje matematikos literatūroje yra gausu eksperimento pavyzdžių, tačiau dažniausiai aprašyta veikla nėra vadinama eksperimentu, pažinimo proceso schema nenagrinėjama, medžiaga siejama su psichinės savybės (vaizduotės, atminties) ugdymu, modeliavimu, realaus uždavinio sprendimo paieškos rekomendacijomis. Toliau straipsnyje mes pademonstruosime keletą skirtingų moksleivių matematinio pažinimo schemų ir intrepretuosime rezultatus.

2. Tyrimo metodika ir organizavimas

Tyrimas buvo atliekamas remiantis kokybinio veiksmo tyrimo metodologija [9]. Kokybinio tyrimo metodo pasirinkimą lėmė tyrimo objekto specifika. Ne pamokų metu buvo organizuota moksleivių matematinė projektinė veikla – vaikai tyrė pasirinktą matematikos problemą (plačiau žr. [3]). Vienas iš mokymosi veiklos tikslų buvo supažindinti moksleivius su matematinio tyrimo metodologija ir jų naudojamų tyrimo metodų pagrindu plėsti ir tobulinti empirinių ir teorinių pažinimo būdų sąveiką matematikos mokymo(-si) procese. Per užsiėmimus ir po jų buvo fiksuojami moksleivių veiklos etapai, remiantis eksperimento tipologija [4] išskiriami moksleivių empirinės veiklos modeliai ir analizuojamas jų santykis su teoriniu pagrindimu. Tiek struktūruodami mokomąją aplinką, modeliuodami mokytojo ir mokinio sąveiką, tiek interpretuodami tyrimo duomenis rėmėmės konstruktyvistine tyrimo paradigma [5].

3. Tyrimo rezultatai ir interpretacijos

Valdemaras, 10 kl. Tiesių susikirtimo taškų skaičiaus uždavinys

Problema. Duota n nelygiagrečių tiesių, iš kurių ne daugiau kaip dvi kertasi viename taške. Rasti maksimalų šių tiesių susikirtimo taškų skaičių.

Buvo sutarta, kad moksleivis „galvos balsu“. Pateikiame charakteringiausius mokinio veiklos momentus bei jų interpretacijas. Moksleivio kalbą ir veiklos aprašą išskirsime kursyvu, interpretacijas rašysime laužtiniuose skliaustuose.

V: Dvi tiesės – vienas taškas. Tarkime, turime 3 tieses. (Brėžia).Tada bus trys susikirtimo taškai. Jei tiesės keturios, kas tada? (Brėžia). Gali būti visaip. Labai įvairūs atvejai, skirtingos tiesių padėtys... Vis tiek nesigaus daugiau kaip 6 susikirtimo taškai. 1, 3, 6, vadinasi toliau būtų 9.

[Moksleivis eksperimentuoja su konkrečiais objektais (popieriaus lape nubrėžtomis tiesėmis). Eksperimento rezultatų pagrindu induktyviai formuluoja hipotezę H1].

V: Patikrinkime. (Brėžia 5 tieses, tačiau situaciją, duodančią maksimalų susikirtimo taškų skaičių nustato ne iš karto). Pasirodo, yra 10 susikirtimo taškų.

[Valdemaras atlieka kritinį eksperimentą: tikrina ir atmeta empiriniu pagrindu suformuluotą hipotezę.]

V: 1, 3, 6, 10... Kas toliau? Jei duotos 6 tiesės... (brėžia). Kažkokia painiava, reikia sugalvoti gudresnį būdą tų taškų skaičiavimui. Kiekviena iš tų tiesių vis tiek turės susikirsti su likusiomis penkiomis. O tiesės yra šešios. Tada... penki kart šeši – 30. Tikriausiai per daug.

[Moksleivis tęsia eksperimentą siekdamas gauti daugiau empirinių faktų, tačiau, ir tai esminis lūžis, keičia stebėjimo objektą: vietoje susikirtimo taškų skaičių išreiškiančios sekos jis pradeda analizuoti taškų „susidarymo mechanizmą". Pakitęs stebėjimo objektas iššaukia ir tyrimo metodikos kitimą. Šį virsmą sąlygojo uždavinio situacija: nubrėžti 6 tieses taip, kad jos kirstų viena kitą, yra gana sudėtinga. Valdemaras, naudodamas stebėjimo rezultatą kaip prielaidą dedukcijai, formuluoja hipotezę H2, tačiau intuityviai jaučia, kad šios hipotezės tikėtinumo laipsnis yra mažas. Nuojautos pagrindas – anksčiau atlikti stebėjimai.]

V: Palaukit, tuoj patikrinsiu, tuo būdu galima skaičiuoti susikirtimo taškų skaičių ir prieš tai buvusiems atvejams. Jei tiesės trys – trys kart du lygu šešiems... Palaukit, čia kažkas ne taip. Juk mes gavome brėždami tik tris susikirtimo taškus. Jei tiesės keturios – keturi kart trys – lygu 12... Kodėl aš gaunu dvigubai daugiau taškų?

[Vėl stebime samprotavimą pagal kritinio eksperimento schemą, tikrinama ir atmetama hipotezė H2. Pažymėtina, kad realiai eksperimentas nekartojamas, tikrinimui panaudojami ankstesni empiriniai duomenys.]

V: Na gerai, nusibrėšiu dar kartą aš tas tris tieses. Pažymėkim jas raidėmis k, l, m, o jų susikirtimo taškus – A, B, C. Taip bus lengviau tuos taškus suskaičiuoti. Kur pusė jų dingsta? Tiesė k kerta likusias dvi, gaunam du susikirtimo taškus. Dabar tiesė l. Aha, dabar man aišku, juk kiekvieną tašką aš įskaičiuoju du kartus. Vadinasi, iš tikrųjų susikirtimo taškų bus dvigubai mažiau: du kart trys, ir rezultatą daliname iš 2.

[Moksleivis kartoja eksperimentą keisdamas stebėjimo objektą. Tiesių ir taškų vardai palengvina sankirtos taškų skaičiavimą. Pažymėtina, kad hipotezė H3 gaunama ne induktyviai apibendrinant, o analizės būdu, suvokus, kaip atsiranda susikirtimo taškai.]

V: Patikrinkime, ar formulė galioja, kai yra 4 tiesės: 4 kart trys, ir dalinam iš 2. Gaunam 6. Teisingai. Mokytoja, aš išvedžiau formulę. Jei turėsim, pvz., 10 tiesių, tai susikirtimo taškų bus: 10 kart 9 ir daliname iš 2: lygu 45.

[Kritinis eksperimentas parodo, kad hipotezė H3 teisinga. Iš tiesų eksperimento rezultatas tik padidina hipotezės tikėtinumą, tačiau moksleivis šį empirinį tikrinimo būdą suvokia kaip įrodymą.]

***Mokytoja**: O jeigu būtų n tiesių? Kiek tada būtų susikirtimo taškų?*

V: Nesuprantu, ko iš manęs norite ... n tiesių? Nežinau. Neįsivaizduoju.

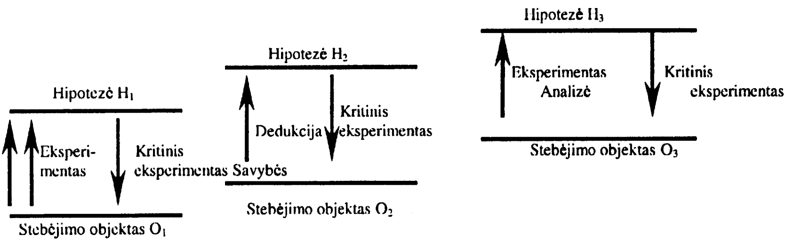
***Mokytoja**: O jei turėtum 100 tiesių?*

V: Čia viskas aišku 100 kart 99 ir daliname iš dviejų.

***Mokytoja**: Pamėgink paaiškinti, kodėl taip skaičiuoji.*

V: Tiesių 100, aš tą skaičių dauginu iš 99. Paskui rezultatą dalinu iš 2. Skaičius 99 yra 1 mažesnis už 100. Juk tiesė pati savęs nekerta, tai vieną atmetu. Iš dviejų, nes kiekvieną tašką skaičiuoju du kartus.

[Eksperimentą vaikas renkasi kaip jam priimtiniausią problemos sprendimo būdą, tačiau nejaučia poreikio formalizuoti rezultatą. Mokytojos reikalavimas paaiškinti atlieka-



1 pav. Valdemaro atlikto tyrimo schema.

mus skaičiavimus priverčia moksleivį refleksuoti veiklą ir tuo būdu formuluoti „įrodymą pavyzdyje“ (proof in example).]

Mokytoja: o jei n tiesių?

V: A, aišku. n... bus $(n-1)$ *tiesė. Vadinasi,* $\frac{n(n-1)}{2}$. *Išvedžiau formulę. Tuoj patikrinsiu, ar ji teisinga. (Įrašo į formulę konkrečias reikšmes ir taip gautą atsakymą lygina su anksčiau gautais empiriniais rezultatais.)*

[Nepaisant to, kad moksleivis prieš tai dedukciniu samprotavimu patvirtino šios formulės teisingumą, patikimesnis jam atrodo empirinis tikrinimas. Žodžiu suformuluota veiklos taisyklė ir formulė jam yra skirtingi matematiniai objektai. Įrašydamas į formulę konkrečias reikšmes jis eksperimentu „patikrina“ formulės teisingumą, nors algoritmo teisingumu jau buvo įsitikinęs.]

Aprašytą matematinio tyrimo procesą galima pavaizduoti daugiapakope schema. Valdo darbe galime įžvelgti beveik visas eksperimento rūšis: aristoteliškąjį, bekoniškąjį, o iškėlus hipotezę, ji vėl tikrinama eksperimentu – vadinamasis crucial, arba galilėjiškasis eksperimentas. Mokinys savo tyrime naudoja labai įvairius eksperimentinio pažinimo būdus, derina juos su dedukcinio protavimo elementais, tačiau iš esmės nejaučia poreikio pagrįsti atrastą formulę matematikoje priimtais būdais.

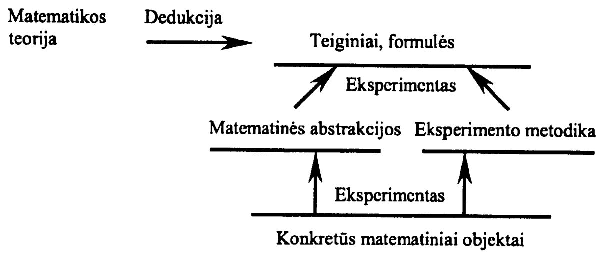
Siekdami iliustruoti teiginį apie moksleivių naudojamų eksperimento metodo formų įvairovę mokykliniame matematiniame tyrime be išsamesnės analizės pateiksime dar keletą pavyzdžių. Atkreipsime dėmesį, kad kiekvieno moksleivio darbe eksperimento metodas pasireiškia skirtingai, atlieka nevienodas funkcijas, galime stebėti įvairias eksperimento rūšis.

Toma ir Vytautas, 11 kl. Tarpusavyje pirminių skaičių uždavinys

Problema. Pasirinkus bet kokį natūralųjį skaičių n, rasti, kiek yra natūraliųjų skaičių, ne didesnių už n ir tarpusavyje pirminių su skaičiumi n.

Moksleiviai šį uždavinį išskaidė dalimis. Jie pradėjo tyrinėti skaičius, kurie yra pirminio skaičiaus laipsniai (pvz., 4, 81). Išanalizavę keletą konkrečių pavyzdžių, jie pabandė nagrinėti bendresnį atveją p^2, p^3, p^4. Pakartojus tą pačią procedūrą, kaip ir su konkrečiais skaičiais, indukcijos būdu rezultatai buvo apibendrinti ir užrašyta formulė. Įrodyti šią formulę moksleivius paskatino mokytoja.

Matome, kad iš pradžių moksleiviai atliko eksperimentą su konkrečiais skaičiais, tačiau jo tikslas buvo ne galutinė formulė, o reiškinio prigimties tyrimas. Taigi, eksperimento rezultatas yra pati eksperimento metodika. Vėliau ši metodika taikoma aukštesnio



2 pav. Tomos ir Vytauto matematinio tyrimo schema.

abstrakcijos lygio matematiniams objektams. Eksperimentas pakankamai įtikina moksleivius ir formulės įrodymas jiems yra ne natūrali reikmė, bet išorinis matematikos stiliaus reikalavimas.

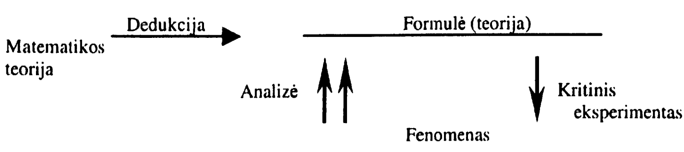
Moksleiviai šį dviejų pakopų eksperimentą pakartojo skaičiams, kuriuos galima išreikšti dviejų pirminių skaičių laipsnių sandauga. Tyrinėdami skaičius, kuriuos galima išreikšti trijų pirminių skaičių laipsnių sandauga, rėmėsi jau žinoma eksperimento metodika ir tyrimo su konkrečiais skaičiais neatliko. Formules įrodinėjo be mokytojos paskatinimo. Taigi įrodymas moksleiviams tampa neatsiejamu tyrimo elementu. Formulę skaičiams, kuriuos galima išreikšti keturių pirminių skaičių laipsnių sandauga užrašė ir įrodė be eksperimento. Moksleiviai suvokia, eksperimentą, kaip euristinį metodą, kurį demonstruoti aprašant rezultatą nėra būtina. Įrodę formulę skaičiams, kurie yra šešių pirminių dauginamųjų laipsnių sandauga, ir pastebėję, kad formulės algebrinė išraiška kiekvienu atveju yra panaši, moksleiviai nusprendė, kad tokia pat formulė turėtų būti gauta ir skaičiui, kuris yra k pirminių skaičių laipsnių sandauga. Šios formulės įrodyti jie nesugebėjo, tačiau ieškojo įodymo internete.

Šiuo atveju stebime bekoniškojo eksperimento pavyzdį bei induktyvų apibendrinimą. Matome, kaip evoliucionavo matematinio tyrimo metodo samprata.

Aurelijus, 12 kl. Parabolės liestinės

Problema. Statusis kampas juda taip, kad jo kraštinės liečia parabolę $y = ax^2$. Kokią kreivę brėžia stačiojo kampo viršūnė?

Moksleivis užrašė dviejų tarpusavyje statmenų parabolės liestinių lygtis ir nustatė jų susikirtimo taško geometrinę vietą. Gavęs rezultatą, Aurelijus labai nustebo – pasirodo, stačiojo kampo viršūnė brėžia tiesę, kurios lygtis $y = -\frac{1}{2a}$. Kadangi teoriškai gautas rezultatas moksleiviui pasirodė abejotinas, jis nusprendė jį patikrinti eksperimentu. Jis parašė kompiuterinę programą, kurios pagalba buvo vaizduojamas status kampas, judantis taip, kad jo kraštinės liečia parabolę. Eksperimento rezultatas patvirtino teoriją – stataus kampo viršūnė judėjo tiese, kurios lygtis sutapo su teoriškai gautąja.



3 pav. Aurelijaus atlikto tyrimo schema.

Šiuo atveju moksleivio darbo procese stebime galilėjiškojo, vadinamojo kritinio (crucial) eksperimento pavyzdį: eksperimentu tikrinami teoriškai gauti rezultatai. Pažymėtina tai, kad netikėtos teorinės išvados paskatino jas patikrinti eksperimentiškai.

4. Išvados

- Eksperimentas yra neatsiejama matematinio tyrimo, o tuo pačiu ir matematinės teorijos konstravimo, dalis. Vienas moksleivis gali naudoti keletą skirtingų eksperimento schemų. Kiekvieno mokinio naudojamų teorinių ir empirinių pažinimo metodų santykis yra individualus.
- Eksperimentas yra natūrali ir moksleiviui priimtina matematinio tyrimo veiklos forma. Paprastai eksperimento moksleiviai neplanuoja, atlieka jį kaip natūralią pažinimo procedūrą: neformuluoja eksperimento tikslo, neįvardija stebėjimo objekto, eksperimento metodikos.
- Eksperimentas nėra vien empirinių faktų kaupimo įrankis. Mokinys gali šiais eksperimentiniais faktais naudotis jau, atrodo, įrodytai teorijai patikrinti – dedukcinio protavimo būdu patvirtinti teiginiai gali nekelti mokiniui pasitikėjimo.
- Mokytojas, kuris žino eksperimento rūšis, supranta eksperimento vietą ir funkcijas matematiniame tyrime gali optimaliau valdyti mokymosi aplinką, kad sudarytų sąlygas mokiniui panaudoti matematikai būdingus veiklos metodus.

Literatūra

[1] N. Balacheff, Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège, These, Grenoble (1988).

[2] S. Balčiūnas, Mokinių gebėjimas argumentuoti kaip įrodymo mokymo prielaida, *Liet. Matem. Rink.*, **41**, spec. nr., 343–349 (2001).

[3] S. Balčiūnas, D. Freibergaitė, Projektų metodas kaip matematinio tyrimo organizavimo forma, *Fizika, matematika ir informatika bendrojo lavinimo ir aukštojoje mokykloje*, Straipsnių rinkinys, Šiauliai (2001), pp. 202–208.

[4] S. Balčiūnas, D. Freibergaitė, Eksperimento metodas mokyklinėje matematikoje, *Matematika ir matematikos dėstymas – 2002*, Konferencijos pranešimų medžiaga, Kaunas (2002), pp. 121–126.

[5] K.N. Denzin, Y.S. Lincoln, *The Landscape of Qualitative Research. Theories and Issues*, London (1993).

[6] V. Drėgūnas, P. Rumšas, *Bendroji matematikos mokymo metodika*, Vilnius (1984).

[7] P. Ernest, *The Philosophy of Mathematics Education*, London (1991).

[8] L. Healy, C. Hoyles, Student's performance in proving: competence or curriculum, *Proceedings of the CERME-1 Conference*, Osnabrueck (1999).

[9] K. Kardelis, *Mokslinių tyrimų metodoligija ir metodai*, Kaunas (2002).

[10] P. Peccatte, Philosophie et mathématiques: sur le quasi-empirisme, *Journée d'étude REHSEIS (Recherches Epistémologiques et Historiques sur les Sciences Exactes et les Institutions Scientifiques)*, Paris (1998).

Experiment as methods of student's methods of mathematical research activity

S. Balčiūnas, D. Freibergaitė

The article deals with the mathematical experiment method on the basis of the constructivist theory. The types of experiment are illustrated by mathematical samples at school. The samples of mathematical experiments out by students are displayed.