Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 411–416

Tyrimo uždaviniai J. Matulionio jaunųjų matematikų konkurse

Bronė NARKEVIČIENĖ, Laima PAPRECKIENĖ, Vilija DABRIŠIENĖ (KTU)
el. paštas: bronar@gim.ktu.lt, laima.papreckiene@.fmf.ktu.lt, nepamirsk@takas.lt

Straipsnyje pateikiami prof. J. Matulionio jaunųjų matematikų konkurso tyrimo uždavinių sprendimų analizės rezultatai.

Matematikos konkursai ir olimpiados sudaro prielaidas ieškoti gabių ir itin gabių matematikai moksleivių, suteikti jiems sąlygas parodyti, ką yra išmokę ir geba, pasitikrinti ir palyginti savo ir kitų moksleivių gebėjimus bei sulaukti savo matematinių pasiekimų pripažinimo. Svarbu yra ir tai, jog jų dalyviai turi galimybę pabendrauti su matematikos profesionalais bei bendraamžiais, kurių interesai ir polinkiai sutampa.

Konkurso uždaviniai paprastai reikalauja iš dalyvių gilaus temos žinojimo ir supratimo, o gabumai „patikrinami“ tuo, kad turimas žinias reikia kūrybiškai pritaikyti, perdirbant sąlygoje pateiktą informaciją. Konkursinės užduotys netiesiogiai daro įtaką mokykloms: tiek mokymo turiniui ir mokymo metodams, tiek reikalavimams, kurie keliami moksleivių gebėjimams. Šis „šalutinis efektas“ tuo stipresnis, kuo labiau prestižinis yra konkursas ar olimpiada. Apskritai, matyt, konkursus galima laikyti prasmingu ir efektyviu moksleivių ugdymo instrumentu.

Šiame straipsnyje laikysimės nuostatos, jog viena matematikos konkursų paskirčių – daryti teigiamą poveikį matematiniam švietimui bei ugdymui Lietuvos mokyklose. Norint sustiprinti minėtą poveikį reikėtų gilesnės konkursų teikiamos informacijos analizės, platesnės nei žinojimas, kas ir kiek balų surinko ar nugalėjo. Kol kas Lietuvoje trūksta tokio pobūdžio darbų.Todėl šio **darbo tikslas** – pateikti KTU J. Matulionio jaunųjų matematikų konkurso uždavinių sprendimų analizės rezultatus. Į šį nuo 1990 metų organizuojamą konkursą moksleiviai gali atvykti be jokios pirminės atrankos. Tai leidžia pamatyti ne vien gabiausiųjų moksleivių žinių ir gebėjimų lygį.

Analizei pasirinkti **tyrimo uždaviniai**, nes jie gerai atspindi ne tik mūsų moksleivių žinias, bet ir gebėjimą operuoti turimomis žiniomis. Išanalizuoti 828 devintųjų ir dešimtųjų klasių bei 239 vienuoliktųjų ir dvyliktųjų klasių moksleivių darbai. Nagrinėti 1995–2001 metų konkursų dalyvių devynių tyrimo uždavinių sprendimai. Aiškumo dėlei pateiktos uždavinių sąlygos [2]. Sprendėjų skaičius, moksleivių sprendimų įvertinimo taškais duomenys pateikiami lentelėse. Kiekvieno uždavinio sprendimų analizėje nurodomos pagrindinės moksleivių daromos klaidos, reikalingų gebėjimų trūkumas.

1 uždavinys (1995, 11–12 klasės):

Prieš keliolika metų du broliai pardavė avių bandą. Už kiekvieną avį jie gavo tiek rublių, kiek bandoje buvo avių. Nutarė dalintis pinigus po lygiai. Vyresnysis brolis atidėjo

10 rublių sau, padavė 10 rublių broliui, vėl 10 rublių sau ir 10 rublių broliui, 10 sau ir 10 broliui ir t.t.

Galiausiai padėjęs paskutinę dešimtrublę sau, pastebėjo, kad broliui lieka mažesnė suma. Nenorėdamas nuskriausti brolio, jis išsitraukė iš kišenės lenktinį peilį ir kartu su likusiais keliais rubliais atidavė jaunesniajam. Kiek kainavo peilis? (3 taškai)

Šį uždavinį turėjo spręsti 72 moksleiviai. Jie turėjo įrodyti teiginį: jei natūraliojo skaičiaus kvadrato dešimčių skaitmuo yra nelyginis, tai jo vienetų skaitmuo yra 6.

Sprendimai buvo įvertinti taip:

Gauta taškų	3	2	1	0
Moksleivių skaičius	26	6	3	37

Norint išspręsti šį uždavinį reikėjo tinkamai pasižymėti dydžius, mokėti sudaryti lygtį ir tikrinti dalumą.

Pagrindinės moksleivių daromos klaidos ir gebėjimų trūkumai:
nesugalvoja uždavinio idėjos, pasižymi dydžius gerai, tačiau nemoka sudaryti lygties, nepastebi, kad dešimčių skaitmuo turi būti nelyginis, nemoka parašyti lygties, nemoka tirti liekanos, neišnagrinėja visų variantų, uždavinį sprendžia gerai, tik nepilnai paaiškina, kodėl netinka kiti variantai.

2 uždavinys (1997, 9 klasė):
Raskite penkiaženklį skaičių A, kurio gale prirašę 1, gautume šešiaženklį skaičių, 3 kartus didesnį už kitą šešiaženklį skaičių su A pradžioje prirašytu vienetu. (4 taškai)

Šiame konkurse dalyvavo iš viso 60 devintos klasės moksleivių. Jų sprendimai buvo įvertinti taip:

Gauta taškų	4	3,5	0
Moksleivių skaičius	42	1	17

Galime matyti, kad šį uždavinį 70% moksleivių išsprendė labai gerai ir 28% labai blogai. Dauguma devintokų tinkamai pažymėjo skaičius, sudarė lygtį ir, ją išsprendę, apskaičiavo skaičių A. Didžioji dalis gavusiųjų 0 taškų net nepradėjo uždavinio spręsti.

3 uždavinys (1997, 9 klasė):
Su kuriomis a ir b reikšmėmis lygtis $x^2 + a|x| + b = 0$ *turi keturis sprendinius?* (4 taškai)

Šiame konkurse dalyvavo iš viso 60 devintos klasės moksleivių. Jų sprendimai buvo įvertinti taip:

Gauta taškų	4	1	0,5	0
Moksleivių skaičius	2	8	7	43

Labai daug moksleivių (71,66%) nemokėjo ar nežinojo kaip spręsti; gavusieji 0,5 ar 1 tašką sudaro atitinkamai 11,66% ir 13,33%. Tik 2 moksleiviai (3,33%) išsprendė uždavinį puikiai.

Pagrindinės moksleivių padarytos klaidos ar gebėjimų trūkumai:

nežino, kada ši lygtis turės 4 sprendinius, nemoka spręsti kvadratinės lygties, kai nežinomasis yra su modulio ženklu, spėliodami parenka atsitiktines parametrų reikšmes, neužrašo sąlygos, jog diskriminantas turi būti didesnis už nulį, nes tik tuomet kvadratinė lygtis turi du sprendinius; suranda x reikšmes, bet neatsižvelgia į apibrėžimo sritį.

4 uždavinys (1997, 10 klasė):

Raskite keturženklį skaičių $\overline{abcd}$, kurio skaitmenų suma lygi skaičiaus 2023 ir $\overline{abcd}$ skirtumui. Ar toks skaičius – vienintelis? (4 taškai)

Šiame konkurse dalyvavo iš viso 101 dešimtokas. Jų sprendimai buvo įvertinti taip:

Gauta taškų	4	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
Moksleivių skaičius	31	10	1	21	2	9	6	21

Šį uždavinį dešimtokai pradeda spręsti nuo keturženklio skaičiaus išskaidymo į tūkstančio, šimtų, dešimčių ir vienetų skaitmenis. Tą veiksmą atliko beveik visi sprendusieji, išskyrus moksleivius, kurie neparašė jokio sprendimo ir gavo 0 taškų. Keletas uždavinį sprendė spėjimo būdu, be jokio pagrindimo. Gavusieji 2 taškus išnagrinėjo tik vieną dalį, teigdami, jog daugiau tokių skaičių nėra, ir šio savo teiginio patikrinti nemokėjo. Daug moksleivių moka surasti leistinas a, b, c, d reikšmes, jas perrinkdami. Kadangi tokių reikšmių nėra daug, tai moksleiviai suranda keturženklius skaičius, tenkinančius sąlygą, tačiau, jei jų būtų daug, toks uždavinio sprendimo būdas užimtų labai daug laiko. Todėl reikia ieškoti racionalesnio apibendrinto sprendimo, t.y., analizuoti kiekvieną galimą reikšmę, sudaryti lygtį ir ją išspręsti.

5 uždavinys (1999, 9 klasė):

Raskite visus sveikuosius neneigiamus skaičius a, b, c ir d, $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$, su kuriais $1 \cdot a + 9 \cdot b + 9 \cdot c^2 + 9 \cdot d^3 = 1999$.

Šiame konkurse dalyvavo iš viso 187 devintokai. Jų sprendimai buvo įvertinti taip:

Gauta taškų	5	4,5	4	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
Moksleivių skaičius	12	3	5	13	2	22	2	5	11	112

Nemokėjusių išspręsti yra daugiau nei pusė – 59,89%; tik 6,42% moksleivių išsprendė uždavinį puikiai. Taigi uždavinys moksleiviams buvo tikrai sunkus.

Šio uždavinio idėja yra pirmiausia tikrinti, su kuriomis leistinosiomis a reikšmėmis $(1999 - a)$ dalijasi iš 9, o po to iš eilės nagrinėti b, c ir d leistinas reikšmes. Daugumos pagrindinė klaida – nemoka užrašyti sprendimo. Mokiniai viską gerai nagrinėja juodraštyje, tačiau, kaip apibendrinti ir nuosekliai parašyti, nežino. Taip pat neišanalizuoja visų variantų, t.y., parašo uždavinio rezultatą ir jį įrodo, tačiau nepagrindžia, jog kitų skaičių, tenkinančių lygybę, nėra.

6 uždavinys (1999, 11 klasė):
Su kuriomis parametro a reikšmėmis lygtis $\sqrt{x+a} = x^2 - a$ turi du skirtingus sprendinius? (5 taškai)

Šiame konkurse dalyvavo 167 vienuoliktokai. Jų sprendimai buvo įvertinti taip:

Gauta taškų	5	4,5	4	3	2	1,5	1	0,5	0
Moksleivių skaičius	1	1	2	2	15	1	16	16	113

Visiškai nemokėjusių uždavinio išspręsti moksleivių yra daug – 67,66%. Tik vienas moksleivis išsprendė uždavinį pilnai. Dauguma sprendusių šį uždavinį tik iš lygties išreiškė parametrą a, gaudami vieną parametro reikšmę $a = 0$ ir neanalizuodami, kaip keičiasi lygties sprendiniai, kai $a > 0$ ir $a < 0$. Dar keletas būdingų klaidų – moksleiviai nenagrinėja apibrėžimo srities, apskaičiuoja diskriminantą, bet netikrina, su kuriomis parametro a reikšmėmis diskriminantas bus teigiamas ir lygtis turės du sprendinius, gautųjų x reikšmių nederina su apibrėžimo sritimi.

7 uždavinys (2000, 9 klasė):
Raskite du skaičius, kurių: 1) *suma, sandauga ir dalmuo yra vienodi;* 2) *suma, sandauga ir kvadratų skirtumas yra vienodi.* (4 taškai)

Šiame konkurse dalyvavo 138 devintos klasės moksleiviai. Kaip jiems sekėsi spręsti uždavinį, matome iš lentelės:

Gauta taškų	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
Moksleivių skaičius	13	6	4	3	8	2	2	10	90

Moksleiviai, kurių darbai įvertinti 0 taškų, neparašė jokio sprendimo arba sprendė nelogiškai. Gavę 0,5 taško, uždavinį sprendė spėjimo būdu, sprendimo nepateikdami. Gavusieji 1 tašką, mokėjo sudaryti lygtis, tačiau nemokėjo jų išspręsti; gavusieji 1,5 taško, buvo neišsprendę vienos ar kitos dalies, o išspręstojoje dalyje trūko apibrėžimo srities analizės. Pastebėta, kad moksleiviai uždavinio toliau nesprendžia, kai diskriminantas nėra lygus sveikojo skaičiaus kvadratui, laikydami, jog tai yra negerai.

8 uždavinys (2000, 10 klasė):
Ar galima iš aritmetinę progresiją sudarančių trijų skaičių sudaryti geometrinę progresiją? (4 taškai)

Šiame konkurse dalyvavo 141 dešimtokas. Uždavinio sprendimų įvertinimai taškais pasiskirstę taip:

Gauta taškų	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
Moksleivių skaičius	–	–	–	–	1	2	53	15	70

Nesupratę sąlygos, mokiniai neišsprendė šio uždavinio. Dauguma laikė, kad visi trys nariai yra a, a, a, kiti kritikavo šį atvejį: vienodi skaičiai – nėra jokio progreso. Moksleiviai nepritaikė paprastai jų žinomo ir naudojamo „perrinkimo“ metodo – sprendžiant uždavinį, reikėjo išnagrinėti visus šešis progresijos narių perstatymo atvejus.

9 uždavinys (2000, 10 klasė):

Tarp 25 vienodos vertės monetų viena netikra (lengvesnė arba sunkesnė už kitas). Kiek mažiausiai kartų pakanka jas sverti lėkštinėmis svarstyklėmis be svarelių, norint surasti netikrąją monetą? (5 taškai)

Dalyvavo 141 dešimtokas. Sprendimų įvertinimų taškais pasiskirstymas yra toks:

Gauta taškų	5	4,5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0
Moksleivių skaičius	5	3	4	2	12	5	17	14	31	17	31

Visiškai nieko nepajėgusių padaryti moksleivių šįkart nedaug – 21,99%. 5 moksleiviai uždavinį išsprendė puikiai.

Pagrindinės daromos klaidos ar gebėjimų trūkumai:

- daroma prielaida, jog jau pirmą kartą sveriant „1 ir 1" nebus svarstyklių pusiausvyros, ir taip iškart sužinoma, kuri moneta netikra;
- sveriama po vieną monetą ir tikrinama, neatsižvelgiant į sąlygoje keliamą minimalaus svėrimų skaičiaus reikalavimą;
- monetos suskirstomos netinkamai:
  1) 12 – 12; 3 – 3 – 3 – 3; 1 – 1;
  2) 12 – 12; 6 – 6; 3 – 3; 2 – 2; 1 – 1;
  3) 5 – 5 – 5 – 5 – 5; 2 – 2 – 1; 1 – 1.
- jei monetos suskirstomos gerai, tai nepavyksta išaiškinti, kaip svėrimų procesas vyksta toliau;
- neišskiriami atvejai, kai žinoma, jog netikroji moneta lengvesnė (sunkesnė) ir kai tai nežinoma.

Apibendrindami tai, kas pasakyta, pateikiame 1 lentelę, iš kurios matome, kad sunkiausi uždaviniai buvo 3, 6 ir 8. Uždavinio sunkumas (US) skaičiuotas pagal formulę [1]:

$$US = \frac{M}{T_{\max}},$$

1 lentelė

Uždavinio numeris	Uždavinio įvertinimas	Moksleivių skaičius	Puikiai išsprendusių moksleivių skaičius	Įvertintų 0 taškų sprendimų skaičius	Uždavinio sunkumas
1.	3 taškai	72	26	37	0,43
2.	4 taškai	60	42	17	0,71
3.	4 taškai	60	2	43	**0,08**
4.	4 taškai	101	31	21	0,53
5.	5 taškai	187	15	112	0,21
6.	5 taškai	167	2	113	**0,09**
7.	4 taškai	138	19	90	0,21
8.	4 taškai	141	0	70	**0,12**
9.	5 taškai	141	8	31	0,29

čia M – įvertinimų taškais vidurkis, $T_{\max}$ – maksimalus galimas uždavinio įvertinimas taškais. Sunkiausias uždavinys yra tas, kurio US mažiausias.

Išvados

1. Padidėjus bendram dalyvių skaičiui, didesnis silpnai pasiruošusių mokinių skaičius.
2. Dauguma mokinių nesugalvoja racionalaus sprendimo idėjos.
3. Pagrindiniai moksleivių gebėjimų trūkumai, į kuriuos mokytojams vertėtų atkreipti dėmesį:
   a) nagrinėjamas tik vienas atvejis, kai jų gali būti daugiau; neįrodoma, jog kai kurie atvejai netinkami;
   b) nevykusiai aprašomas sprendimas, nors idėja yra gera;
   c) spėliojama, niekuo nepagrindžiant sprendimo;
   d) mokinys netinkamai pasižymi dydžius, nemoka sudaryti lygties ir jos išspręsti; spręsti grafiškai;
   e) pamiršta nurodyti apibrėžimo sritį arba ją pritaikyti;
   f) nemoka suformuluoti atsakymo.

Vis dėlto konkurso organizatorius džiugina moksleivių dėmesys matematikai, geriausių darbų gausa. Tikimės, kad matematikos mokytojų Lietuvos mokyklose aktyvumas ir nuoširdus darbas būsimųjų konkursų dalyviams leis išvengti čia paminėtų apmaudžių trūkumų.

Literatūra

[1] J. Krauth, *Testkonstruktion und Testtheorie*, Psychologie Verlag Union, Weinheim (1995).
[2] *Respublikinio prof. J. Matulionio jaunųjų matematikų konkurso užduotys ir sprendimai*, Technologija, Kaunas (2001).

Research problems in prof. J. Matulionis competition of young mathematicians

B. Narkevičienė, L. Papreckienė, V. Dabrišienė

This article presents analysis results of research problems in prof. J. Matulionis competition of young mathematicians.