Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 663–667

Daugiamatės automatinio valdymo sistemos su vėlinimais matematinio modelio tyrimas

Jonas RIMAS (KTU)
el. paštas: jonas.rimas@fmf.ktu.lt

Nagrinėsime lygtį

$$Dx(t) = B_0x(t) + B_1x(t-\tau) + z(t); \tag{1}$$

čia D – apibendrinto diferencijavimo operatorius, $B_0 = -\kappa E$, E – vienetinė n-tosios eilės matrica, κ – koeficientas, $B_1 = \frac{\kappa}{2}B$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 2 & 0 \end{pmatrix} - \tag{2}$$

n-tosios eilės matrica, $x(t)$ – ieškoma vektorinė funkcija, τ – pastovus vėlinimas, $z(t)$ – vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių sąlygų.

(1) lygtis yra ryšio tinklo sinchronizacijos sistemos (automatinio valdymo sistemos), sudarytos iš n sujungtų į grandinę generatorių, matematinis modelis [1, 2]. Jos sprendinys gali būti užrašytas taip [2]:

$$x(t) \div \sum_{l=0}^{L} (A^{-1}B_1 e^{-p\tau})^l A^{-1} Z(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau, \tag{3}$$

čia $A = pE - B_0$, $A^{-1} = \frac{1}{p+\kappa}E$, $Z(p) \div z(t)$ – operatorinė lygybė, siejanti tarpusavyje pirmavaizdį (funkciją $z(t)$) ir jos vaizdą (funkcijos $z(t)$ Laplaso transformaciją $Z(p)$), $\div$ – operatorinės lygybės ženklas, $L = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Panaudoję (2) pažymėjimą ir (3), turėsime

$$h(t) = (h_{ij}(t)) \div \sum_{l=0}^{L} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{1}{(p+\kappa)^{l+1}} e^{-pl\tau} B^l, \quad 0 < t < (L+1)\tau; \tag{4}$$

čia $h(t)$ – sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matrica, $h_{ij}(t)$ $(i, j = \overline{1,n})$ – i-tojo generatoriaus virpesio fazės reakcija į j-tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį.

Rasime pereinamųjų funkcijų išraiškas. Tuo tikslu apskaičiuosime matricos B l-tąjį laipsnį. Skaičiavimus atliksime pasinaudoję formule [3]

$$B^l = TJ^lT^{-1}; \tag{5}$$

čia J – matricos B Žordano forma, T – transformuojančioji matrica. Matricas J ir T rasime, jei žinosime matricos B tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius. Tikrines reikšmes rasime išsprendę charakteristinę lygtį

$$|B - \lambda E| = 0. \tag{6}$$

Pažymėkime

$$D_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & & & & \\ 1 & \alpha & 1 & & 0 & \\ & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \alpha & 1 \\ & & & & 2 & \alpha \end{vmatrix}, \quad \Delta_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & \\ 1 & \alpha & 1 & & 0 & \\ & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \alpha & 1 \\ & & & & 1 & \alpha \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Tada

$$|B - \lambda E| = D_n(-\lambda). \tag{8}$$

Iš (7) išplaukia

$$D_n(\alpha) = (\alpha^2 - 4)\Delta_{n-2}(\alpha) \tag{9}$$

ir

$$\Delta_n(\alpha) = \alpha\Delta_{n-1}(\alpha) - \Delta_{n-2}(\alpha) \quad (\Delta_2 = \alpha^2 - 1,\ \Delta_1 = \alpha,\ \Delta_0 = 1). \tag{10}$$

Išsprendę (10) skirtuminę lygtį, randame $\Delta_n(\alpha) = U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$,

$$D_n(\alpha) = (\alpha^2 - 4)U_{n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right); \tag{11}$$

čia $U_n(x)$ yra n-tojo laipsnio antrojo tipo Čebyševo daugianaris.

Visi daugianario $U_n(x)$ nuliai yra intervale $[-1, 1]$ ir gali būti surasti naudojantis formule [4]:

$$x_{nk} = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Tai išplaukia iš žinomos lygybės

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sin\arccos x}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{13}$$

Remdamiesi (8), (11) ir (12) išraiškomis, užrašome (6) charakteristinės lygties šaknis (matricos B tikrines reikšmes):

$$\lambda_k = -2\cos\frac{(k-1)\pi}{n-1}, \quad k = 1,2,3,\ldots,n. \tag{14}$$

Toliau nagrinėsime atvejį, kai n lyginis skaičius, t.y. $n = 2p$, $p \in N$.

Rasime matricos B Žordano formą (matricą J). Visos tikrinės reikšmės λ_i $(i = \overline{1,n})$ yra paprastosios, todėl kiekvienai jų matricoje J atitiks viena Žordano ląstelė $J_1(\lambda_i)$ [3]. Įvertinę tai ir pasinaudoję atitiktimi

$$\lambda_k = -\lambda_{n-k+1} \quad (k = 1,2,\ldots,\frac{n}{2}), \tag{15}$$

užrašome matricos B Žordano formą:

$$J = \operatorname{diag}\big(-\lambda_n - \lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} \ldots - \lambda_{\frac{n}{2}+1}\, \lambda_{\frac{n}{2}+1} \ldots \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n \big). \tag{16}$$

Remdamiesi lygybe $J = T^{-1}BT$, randame matricą T ir jai atvirkštinę matricą T^{-1}. Apskaičiuojame matricos B l-tąjį laipsnį:

$$B^l = TJ^lT^{-1} = \frac{1}{2n-2}G(l) = \frac{1}{2n-2}(g_{ij}(l)); \tag{17}$$

čia

$$g_{ij}(l) = (-1)^{i+j}\alpha_j \sum_{k=1}^{n} \beta_k (\lambda_k)^l T_{i-1}\left(-\frac{\lambda_k}{2}\right) T_{j-1}\left(-\frac{\lambda_k}{2}\right), \quad i,j = \overline{1,n}, \tag{18}$$

$$\alpha_j = \begin{cases} 1, & \text{kai } j = 1, n, \\ 2, & \text{kai } 1 < j < n, \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} 1, & \text{kai } k = 1, n, \\ 2, & \text{kai } 1 < k < n, \end{cases}$$

λ_k $(k = \overline{1,n})$ – matricos B tikrinės reikšmės, $n = 2p$ $(p \in N)$ – matricos B eilė, $T_m(x)$ – m-tojo laipsnio pirmojo tipo Čebyševo daugianaris.

Įstatę (17) į (4) ir atlikę reikiamus pertvarkymus, randame sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matricą:

$$h(t) = (h_{ij}(t)); \tag{19}$$

čia

$$h_{ij}(t) = \frac{1}{2n-2}\sum_{l=0}^{L} g_{ij}(l)\left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{(t-l\tau)^l}{l!} \mathrm{e}^{-\kappa(t-l\tau)} 1(t-l\tau), \qquad i,j=\overline{1,n}, \tag{20}$$

$$0 < t < (L+1)\tau,$$

$\mathbf{1}(t)$ – vienetinė funkcija ($\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$).

Panaudojus gautas išraiškas, galima rasti pereinamųjų funkcijų matricą tarpusavio sinchronizacijos sistemai, sudarytai iš n ($n = 2p$, $p \in N$) sujungtų į grandinę generatorių. Pavyzdžiui, jei $n = 4$, gautume

$$J = \mathrm{diag}(-\lambda_4 - \lambda_3 \lambda_3 \lambda_4) = \mathrm{diag}(-2 - 112),$$

$$B^l = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 & 2a_3 & a_4 \\ a_2 & a_5 & a_6 & a_3 \\ a_3 & a_6 & a_5 & a_2 \\ a_4 & 2a_3 & 2a_2 & a_1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} a_1(l) &= (2^l + 2)\left[1 + (-1)^l\right], & a_2(l) &= (2^l + 1)\left[1 - (-1)^l\right], \\ a_3(l) &= (2^l - 1)\left[1 + (-1)^l\right], & a_4(l) &= (2^l - 2)\left[1 - (-1)^l\right], \\ a_5(l) &= (2^{l+1} + 1)\left[1 + (-1)^l\right], & a_6(l) &= (2^{l+1} - 1)\left[1 - (-1)^l\right], \end{aligned}$$

$$h(t) = (h_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} h_1 & 2h_2 & 2h_3 & h_4 \\ h_2 & h_5 & h_6 & h_3 \\ h_3 & h_6 & h_5 & h_2 \\ h_4 & 2h_3 & 2h_2 & h_1 \end{pmatrix},$$

$$h_i(t) = \frac{1}{6}\sum_{l=0}^{L} a_i(l)\left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{(t - l\tau)^l}{l!} \mathrm{e}^{-\kappa(t - l\tau)} \mathbf{1}(t - l\tau), \qquad i = \overline{1,6},$$
$$0 < t < (L+1)\tau.$$

Jeigu $n = 6$, turėtume

$$J = \mathrm{diag}(-\lambda_6 - \lambda_5 - \lambda_4 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6) = \mathrm{diag}(-2 - a - bba2),$$

$$a = 2\cos\frac{\pi}{5}, \quad b = 2\cos\frac{2\pi}{5},$$

$$B^l = \frac{1}{10}(g_{ij}(l)) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 & 2a_3 & 2a_4 & 2a_5 & a_6 \\ a_2 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_5 \\ a_3 & a_8 & a_{11} & a_{12} & a_9 & a_4 \\ a_4 & a_9 & a_{12} & a_{11} & a_8 & a_3 \\ a_5 & a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_2 \\ a_6 & 2a_5 & 2a_4 & 2a_3 & 2a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

$$a_1(l) = (2^l + 2a^l + 2b^l)\left[1 + (-1)^l\right], \quad a_2(l) = (2^l + a^{l+1} + b^{l+1})\left[1 - (-1)^l\right],$$

$$a_3(l) = \left(2^l + ba^l - ab^l\right)\left[1 + (-1)^l\right], \quad a_4(l) = \left(2^l - ba^l - ab^l\right)\left[1 - (-1)^l\right],$$
$$a_5(l) = \left(2^l - a^{l+1} + b^{l+1}\right)\left[1 + (-1)^l\right], \quad a_6(l) = \left(2^l - 2a^l + 2b^l\right)\left[1 - (-1)^l\right],$$
$$a_7(l) = \left(2^{l+1} + a^{l+2} + b^{l+2}\right)\left[1 + (-1)^l\right], \quad a_8(l) = \left(2^{l+1} + a^l - b^l\right)\left[1 - (-1)^l\right],$$
$$a_9(l) = \left(2^{l+1} - a^l - b^l\right)\left[1 + (-1)^l\right], \quad a_{10}(l) = \left(2^{l+1} - a^{l+2} + b^{l+2}\right)\left[1 - (-1)^l\right],$$
$$a_{11}(l) = \left(2^{l+1} + b^2a^l + a^2b^l\right)\left[1 + (-1)^l\right], \quad a_{12}(l) = \left(2^{l+1} - b^2a^l + a^2b^l\right)\left[1 - (-1)^l\right],$$

$$h(t) = \left(h_{ij}(t)\right) = \begin{pmatrix} h_1 & 2h_2 & 2h_3 & 2h_4 & 2h_5 & h_6 \\ h_2 & h_7 & h_8 & h_9 & h_{10} & h_5 \\ h_3 & h_8 & h_{11} & h_{12} & h_9 & h_4 \\ h_4 & h_9 & h_{12} & h_{11} & h_8 & h_3 \\ h_5 & h_{10} & h_9 & h_8 & h_7 & h_2 \\ h_6 & 2h_5 & 2h_4 & 2h_3 & 2h_2 & h_1 \end{pmatrix},$$

$$h_i(t) = \frac{1}{10}\sum_{l=0}^{L} a_i(l)\left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{(t - l\tau)^l}{l!} e^{-\kappa(t-l\tau)} 1\,(t - l\tau), \quad i = \overline{1,12}.$$

Gautos tikslios analizinės pereinamųjų funkcijų išraiškos gali būti panaudotos sistemos dinamikai tirti, jos statistinėms charakteristikoms skaičiuoti, perdavimo funkcijoms ir dažninėms charakteristikoms rasti.

Literatūra

[1] W.C. Lindsey, J.H. Chen, Mutual clock synchronization in global digital communication networks, *Euro. Trans. Telecommun.*, 7(1), 25–37 (1996).

[2] J.Z. Rimas, Issledovanie dinamiki sistem vzaimnoj sinchronizacii. *Radiotechnika*, 32(2), 3–9 (1977).

[3] R. Horn, Ch. Johnson. *Matrix Analysis*, Cambridge university press (1986).

[4] S. Paškovskij, *Vyčislitelnyje primenenija mnogočlenov i riadov Čebyševa*, Maskva (1983).

Investigation of the mathematical model of the multidimensional automatic control system with delays

J. Rimas

The mathematical model of the mutual synchronization system composed of $n = 2p$ ($p \in N$) joined into a chain oscillators is investigated. The precise analytical expressions of the elements of the step responses matrix of the system are obtained.