Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 710–713

Greitųjų statistinių procedūrų perkėlimo teorema

Darius PETRONAITIS (MII, KTU), Algimantas AKSOMAITIS (KTU)
el. paštas: dariuspet@centras.lt

1. Įvadas

Sakykime, kad $\{X_j,\ j \geqslant 1\}$ nepriklausomų atsitiktinių didžių seka su pasiskirstymo funkcija $P\{X_j < x\} = F(x),\ j \geqslant 1$, o $\{N_n,\ n \geqslant 1\}$ – sveikas teigiamas reikšmes įgyjančių atsitiktinių didžių seka, su $P\{N_n < q\} = A_n\,(q),\ n \geqslant 1$. Atsitiktiniai dydžiai X_j ir N_n su visais $j \geqslant 1$ ir $n \geqslant 1$ yra nepriklausomi.

Įveskime šiuos žymenis:

$$R_{N_n} = Z_{N_n} - W_{N_n}, \quad M_{N_n} = \frac{Z_{N_n} + W_{N_n}}{2};$$

čia $Z_{N_n} = \max(X_j,\ j = \overline{1, N_n})$, o $W_{N_n} = \min(X_j,\ j = \overline{1, N_n})$.

Šiame darbe tirsime tiesiškai normuotų struktūrų R_{N_n} ir M_{N_n} skirstinių asimptotiką:

$$\lim_{n\to\infty} P\Big\{\frac{R_{N_n} - A_{1,n}}{B_{1,n}} < x\Big\}, \quad \lim_{n\to\infty} P\Big\{\frac{M_{N_n} - A_{2,n}}{B_{2,n}} < x\Big\}.$$

Tiriant tiesiškai normuotų greitųjų statistinių procedūrų asimptotiką, nagrinėsime tik netrivialų konvergavimą, kurio terminą įvedė L. de Hanas [1]. Silpnas ekstremalių statistikų darinių konvergavimas, kai vienas iš ekstremumų nusveria kitą, vadinamas trivialiuoju konvergavimu. Taigi, mus domina situacija, kai į galutinę išraišką savo indėlį įneša abu ekstremumai.

1 APIBRĖŽIMAS. Sakome, kad funkcija $F(x)$ priklauso maksimumo skirstinio $H_{i,\alpha}(x)$ (arba minimumo skirstinio $L_{i,\beta}(x)$), $i \in \{1,2,3\}$ traukos sričiai, jei egzistuoja tokios konstantų sekos $a_n,\ b_n > 0$, (arba $c_n,\ d_n > 0$), su kuriomis

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n + b_n x) = H_{i,\alpha}\,(x) \tag{1}$$

arba

$$\lim_{n\to\infty} (1 - F(c_n + d_n x))^n = 1 - L_{i,\beta}\,(x)\,. \tag{2}$$

Čia $H_{i,\alpha}(x)$ (arba $L_{i,\beta}(x)$) ne išsigimusi pasiskirstymo funkcija. Simboliškai tai žymėsime taip: $F \in D_Z(H_{i,\alpha})$ (arba $F \in D_W(L_{i,\beta})$), $i \in \{1,2,3\}$).

$H_{i,\alpha}(x)$ ir $L_{i,\beta}(x)$, $i \in \{1,2,3\}$ pavidalas pateiktas [2] (2.4.1 ir 2.4.2 teoremos); čia α, β yra teigiamos konstantos. Vartosime šiuos žymenis:

$$x_* = \inf\{x\colon F(x) > 0\} \geqslant -\infty, \quad x^* = \sup\{x\colon F(x) < 1\} \leqslant +\infty,$$
$$Z_{n,m} = \frac{Z_n - a_m}{b_m}, \quad W_{n,m} = \frac{W_n - c_m}{d_m},$$
$$R_{n,m} = \frac{R_n - A_{1,m}}{B_{1,m}}, \quad M_{n,m} = \frac{M_n - A_{2,m}}{B_{2,m}};$$

čia $b_m > 0$, $d_m > 0$, $B_{i,m} > 0$, $i = \overline{1,2}$ ir a_m, c_m, $A_{i,m}$, $i = \overline{1,2}$ – normalizavimo konstantos, o $n, m \geqslant 1$.

2. Rezultatai ir jų įrodymas

Teorema. *Tarkime, kad* $F \in D_Z(H_{i,\alpha})$, $F \in D_W(L_{i,\alpha})$, $i \in \{1,2,3\}$ *ir* $P\{\frac{N_n}{n} < q\} = A_n(nq) \to A(q)$, *kai* $n \to \infty$. *Tada*

$$\lim_{n\to\infty} P\{R_{N_n,n} < x\} = \Psi_{i,\alpha}(x), \quad \lim_{n\to\infty} P\{M_{N_n,n} < x\} = \Phi_{i,\alpha}(x);$$

čia

$$\Psi_{i,\alpha}(x) = \int_0^\infty F_{i,\alpha}(x,q)\mathrm{d}A(q), \quad \Phi_{i,\alpha}(x) = \int_0^\infty T_{i,\alpha}(x,q)\mathrm{d}A(q),$$

o $F_{i,\alpha}(x,q)$ *ir* $T_{i,\alpha}(x,q)$ *nusakomos taip:*

1. *Jei* $i = 1$ *ir* $0 < \rho < \infty$, *kai* $\rho = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(-x)}{1-F(x)}$, *tada*

$$F_{1,\alpha}(x,q) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} L_{1,\alpha}\left(q^{-\frac{1}{\alpha}}\rho^{-\frac{1}{\alpha}}(y-x)\right)\mathrm{d}H_{1,\alpha}\left(q^{-\frac{1}{\alpha}}y\right), \tag{3}$$

$$T_{1,\alpha}(x,q) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{1,\alpha}\left(q^{-\frac{1}{\alpha}}\rho^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)\right)\mathrm{d}H_{1,\alpha}\left(q^{-\frac{1}{\alpha}}y\right). \tag{4}$$

Normalizavimo konstantos parenkamos taip:

$$A_{1,n} = a_n - c_n, \quad B_{1,n} = b_n, \quad A_{2,n} = \frac{a_n + c_n}{2}, \quad B_{2,n} = \frac{b_n}{2}. \tag{5}$$

2. *Jei* $i = 2$ *ir* $0 < \rho < \infty$, *kai* $\rho = \lim\limits_{x\to+0} \frac{F(x_*+x)}{1-F(x^*-x)}$, *tada*

$$F_{2,\alpha}(x,q) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} L_{2,\alpha}\left(q^{\frac{1}{\alpha}}\rho^{\frac{1}{\alpha}}(y-x)\right)\mathrm{d}H_{2,\alpha}\left(q^{\frac{1}{\alpha}}y\right), \tag{6}$$

$$T_{2,\alpha}(x,q) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{2,\alpha}\left(q^{\frac{1}{\alpha}}\rho^{\frac{1}{\alpha}}(x-y)\right)\mathrm{d}H_{2,\alpha}\left(q^{\frac{1}{\alpha}}y\right). \tag{7}$$

Normalizavimo konstantos parenkamos taip pat, kaip pirmame punkte.

3. *Jei $i = 3$ ir egzistuoja konkreti diferencijuojama funkcija P, kuri taškui x_* gretimų iš dešinės taškų aibę atvaizduoja į taškui x^* gretimų iš kairės taškų aibę taip, kad $1 - F(P(x)) \sim F(x)$, $x \to x_* + 0$ ir $\rho = \lim\limits_{x \to x_*+0} P'(x)$, kai $-\infty < \rho < 0$, tada*

$$F_{3,0}(x,q) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} L_{3,0}\left(-\rho(y-x) + ln(q)\right)\mathrm{d}H_{3,0}\left(y - ln(q)\right), \tag{8}$$

$$T_{3,0}(x,q) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{3,0}\left(-\rho(x-y) + ln(q)\right)\mathrm{d}H_{3,0}\left(y - ln(q)\right). \tag{9}$$

Normalizavimo konstantos parenkamos taip pat, kaip pirmame punkte.

Teoremos įrodymas. Teoremą įrodysime struktūrai R_{N_n}, o struktūrai M_{N_n} įrodymas analogiškas, bet dėl straipsnio apimties ribojimo jo nepateiksime.

Pasinaudoje pilnosios tikimybės formule gauname

$$P\{R_{N_n,n} < x\} = \int_0^{\infty} P\{R_{qn,n} < x\}\mathrm{d}A_n(nq), \tag{10}$$

čia indekse esantis narys qn lygus skaičiaus qn sveikajai daliai.

Atsižvelge į normalizavimo konstantų parinkimo būdą (5) formule, gauname:

$$P\{R_{qn,n} < x\} = P\Bigg\{Z_{qn,qn}\frac{b_{qn}}{b_n} + \frac{a_{qn} - a_n}{b_n} - \left(W_{qn,qn}\frac{d_{qn}}{d_n} + \frac{c_{qn} - c_n}{d_n}\right)\frac{d_n}{b_n} < x\Bigg\}.$$

Iš pastarosios lygybės matome, kad netrivialus konvergavimas galimas, kai $\frac{d_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} S$, $0 < S < \infty$, o tai įmanoma tik tada, kai $F \in D_Z(H_{i,\alpha})$, $F \in D_W(L_{i,\alpha})$, $i \in \{1,2,3\}$ [1]. Konstantos $a_n, b_n > 0$, $c_n, d_n > 0$ parinkimo sąlygos, nusakytos [2] (2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5, 2.1.6 teoremose), o ρ tenkina sąlygas, nusakytas teoremoje, tuomet:

$$S_{1,\alpha} = \rho^{\frac{1}{\alpha}}, \quad S_{2,\alpha} = \rho^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad S_{3,0} = -\rho. \tag{11}$$

Pasinaudoję tuo, kad $F \in D_Z(H_{i,\alpha})$, $F \in D_W(L_{i,\alpha})$, $i \in \{1,2,3\}$, [2] (2.2.3, 2.9.1 lemomis, 2.9.1 teorema) ir (11) formule gausime:

$$\lim_{n\to\infty} P\{R_{qn,n} < x\} = F_{i,\alpha}(x,q), \quad i \in \{1,2,3\}; \tag{12}$$

čia $F_{i,\alpha}(x,q)$ apibrėžta teoremoje. Remiantis (12) ir funkcijos $F_{i,\alpha}(x,q)$, $i \in \{1,2,3\}$ išraiškomis bei sąryšiu $\lim\limits_{n\to\infty} A_n\,(nq) = A(q)$ ir (10) formule įrodoma

$$P\left\{R_{N_n,n} < x\right\} = \int\limits_0^\infty F_{i,\alpha}(x,q)\mathrm{d}A(q).$$

Teorema įrodyta.

Literatūra

[1] L. de Haan, Weak limits of sample range, *Journal Applied Probability*, **11**, 836–841 (1974).
[2] Я. Галамбош, *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, Наука, Москва (1984).

Move theorem of the short-cut statistic procedure

D. Petronaitis, A. Aksomaitis

The limit distribution functions are obtained for the extremes difference and extremes arithmetic average with random indices under nonrandom normalization.